

VIII Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody trzeciego stopnia
(16 marca 2013 r.)



1. Liczby całkowite a , b , c spełniają warunek $a + b + c = bc$. Udowodnij, że liczba $(a + b)(a + c)$ jest podzielna przez 4.

2. Na przyjęciu spotkało się 99 osób. Wiadomo, że wśród każdych trzech osób można wskazać taką, która zna dwie pozostałe osoby z tej trójki. Wykaż, że pewna osoba zna wszystkie inne osoby obecne na przyjęciu.

Uwaga. Przyjmujemy, że jeśli osoba A zna osobę B , to osoba B zna osobę A .

3. Dany jest trójkąt ABC , w którym $\sphericalangle ACB = 120^\circ$. Punkt M jest środkiem boku AB . Na odcinkach AC i BC wybrano odpowiednio takie punkty P i Q , że $AP = PQ = QB$. Wykaż, że $\sphericalangle PMQ = 90^\circ$.

4. Liczby a , b , c , d są większe od 2. Wykaż, że co najmniej dwie spośród liczb

$$\frac{ab}{c}, \quad \frac{bc}{d}, \quad \frac{cd}{a}, \quad \frac{da}{b}$$

są większe od 2.

5. Czy istnieje taki wielościan wypukły, który ma nieparzystą liczbę ścian i w którego każdym wierzchołku schodzi się parzysta liczba krawędzi? Odpowiedź uzasadnij.