VIII Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia pierwszego – część testowa

(18 października 2012 r.)

Rozwiązania zadań testowych

1. Miary α, β, γ kątów pewnego trójkąta spełniają warunek $\alpha+\beta<\gamma$. Wynika z tego, że

N a) trójkąt ten jest ostrokątny;

T b) trójkąt ten jest rozwartokątny;

N c) taki trójkąt nie istnieje.

Komentarz

Przekształcimy podaną nierówność równoważnie. Dodając do obu jej stron γ, otrzymujemy $\alpha+\beta+\gamma<2\gamma$. Suma kątów w trójkącie jest równa $180°$, a zatem $180°<2\gamma$. Stąd wniosek, że warunek dany w treści zadania jest równoważny zależności $90°<\gamma$, która oznacza, że trójkąt jest rozwartokątny.

2. Długość przekątnej pewnego kwadratu jest liczbą niewymierną. Wynika z tego, że

N a) pole tego kwadratu jest liczbą wymierną;

N b) długość boku tego kwadratu jest liczbą wymierną;

N c) obwód tego kwadratu jest liczbą całkowitą.

Komentarz

Rozważmy kwadrat, którego przekątna d ma długość $\sqrt[4]{2}$. Liczba $\sqrt[4]{2}$ jest liczbą niewymierną. Ponadto pole rozważanego kwadratu jest równe

$$\frac{1}{2}d^2=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

i jest to liczba niewymierna. Z kolei długość boku tego kwadratu wynosi

$$\frac{\sqrt{2}}{2}d=\frac{\sqrt[4]{8}}{2}$$

i jest to także liczba niewymierna. Wreszcie obwód tego kwadratu to

$$4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}d=2\sqrt{2}d=2\sqrt[4]{8}$$

i ta liczba jest również niewymierna.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

3. Istnieje liczba naturalna o sumie cyfr równej 2012, podzielna przez

T	a) 4;
T	b) 5;
N	c) 6.

Komentarz

a), b) Niech a będzie liczbą, której pierwsze 2012 cyfr to 1, a cyfry dziesiątek i jedności są równe 0. Liczba a jest podzielna przez 4, gdyż jej ostatnie dwie cyfry tworzą liczbę podzielną przez 4. Liczba a jest podzielna przez 5, gdyż jej ostatnia cyfra to 0.

c) Ponieważ $6=2\cdot 3$ oraz największy wspólny dzielnik liczb 2 i 3 wynosi 1, więc liczba naturalna jest podzielna przez 6 wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez 2 i przez 3. Liczba 2012 nie jest podzielna przez 3, a zatem na mocy cechy podzielności przez 3, liczba o sumie cyfr równej 2012 nie może być podzielna przez 3. Tym bardziej więc liczba ta nie może być podzielna przez 6.

4. Nierówność $\sqrt{x^2-1}>x$

N	a) nie ma rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych;
T	b) ma co najmniej jedno rozwiązanie w zbiorze liczb rzeczywistych;
T	c) ma nieskończenie wiele rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych.

Komentarz

Każda liczba $x\leqslant -1$ spełnia podaną nierówność. Istotnie: jeśli $x\leqslant -1$, to $x^2\geqslant 1$, czyli $x^2-1\geqslant 0$, a zatem wyrażenie $\sqrt{x^2-1}$ jest określone. Ponadto $\sqrt{x^2-1}\geqslant 0$. Wobec tego $\sqrt{x^2-1}\geqslant 0>-1\geqslant x$.

5. Dane są takie liczby całkowite a i b, że liczby $a+b$ i $a-b$ są podzielne przez 12. Wynika z tego, że obie liczby a i b są podzielne przez

T	a) 2;
T	b) 3;
N	c) 4.

Komentarz

a), b) Skoro obie liczby $a+b$ i $a-b$ są podzielne przez 12, to ich suma oraz różnica mają również tę własność. Stąd wynika, że liczby $2a$ i $2b$ są podzielne przez 12, a zatem istnieją takie liczby całkowite k i l, że $2a=12k$ oraz $2b=12l$. Wobec tego $a=6k$, $b=6l$, więc liczby a i b są podzielne zarówno przez 2 jak i przez 3.

c) Przyjmijmy $a=6$ oraz $b=6$. Wówczas liczby $a+b=12$ i $a-b=0$ są podzielne przez 12. Jednak wtedy żadna z liczb a i b nie jest podzielna przez 4.

6. Trójkąt ABC jest podstawą takiego ostrosłupa $ABCS$, że kąty ASB, BSC, CSA są równe. Wynika z tego, że

N a) $AS=BS=CS$;

N b) $AB=BC=CA$;

N c) ostrosłup $ABCS$ jest prawidłowy.

Komentarz

Rozważmy czworościan foremny $AB'C'S$ o krawędzi długości 2. Niech B i C będą odpowiednio środkami krawędzi $B'S$, $C'S$. Przecinając rozpatrywany czworościan płaszczyzną ABC, otrzymujemy ostrosłup $ABCS$, w którym kąty ASB, BSC, CSA są równe. Ponadto $AB=\sqrt{3}$, $BC=1$, $AC=\sqrt{3}$ oraz $AS=2$, $BS=1$, $CS=1$.

7. Dodatnie liczby a i b są całkowite i ich największy wspólny dzielnik jest równy 1. Ponadto liczba $a\cdot b$ jest kwadratem liczby całkowitej. Wynika z tego, że

T a) obie liczby a i b są kwadratami liczb całkowitych;

T b) największy wspólny dzielnik liczb a oraz $a+b$ jest równy 1;

N c) liczba $a+b$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Komentarz

a) Dodatnia liczba całkowita jest kwadratem liczby całkowitej wtedy i tylko wtedy, gdy w jej rozkładzie na czynniki pierwsze każda liczba pierwsza występuje w parzystej potędze.

Niech liczba pierwsza p będzie dzielnikiem liczby a. Wówczas liczba p jest także dzielnikiem liczby $a\cdot b$. Największy wspólny dzielnik liczb a i b jest równy 1, więc liczba p nie jest dzielnikiem liczby b. Wobec tego liczba p występuje w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby a w takiej samej potędze, jak w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby $a\cdot b$. Jednak w rozkładzie liczby $a\cdot b$ na czynniki pierwsze każda liczba pierwsza występuje w parzystej potędze, gdyż liczba $a\cdot b$ jest kwadratem liczby całkowitej.

b) Oznaczmy przez d największy wspólny dzielnik liczb a oraz $a+b$. Ponieważ $d\,|\,a$ oraz $d\,|\,a+b$, więc liczba d jest również dzielnikiem różnicy tych liczb równej $(a+b)-a=b$. Wobec tego $d\,|\,a$ oraz $d\,|\,b$, a skoro największy wspólny dzielnik liczb a i b jest równy 1, to wynika stąd, że $d=1$.

c) Przyjmijmy $a=4$ oraz $b=9$. Liczby a i b spełniają wówczas warunki zadania, ale liczba $a+b=13$ nie jest kwadratem liczby całkowitej.

8. Istnieje taki ostrosłup prawidłowy siedmiokątny, którego krawędź boczna jest

T	a) dłuższa od krawędzi podstawy;
N	b) równa krawędzi podstawy;
N	c) krótsza od krawędzi podstawy.

Komentarz

Rozważmy ostrosłup prawidłowy siedmiokątny $ABCDEFGS$ o podstawie siedmiokąta foremnego $ABCDEFG$. Oznaczmy przez O rzut prostokątny wierzchołka S na podstawę ostrosłupa. Wówczas $\sphericalangle AOB=360°/7$, a zatem $\sphericalangle AOB<60°$. Wobec tego w trójkącie równoramiennym ABO bok AO jest dłuższy od podstawy AB. Ponadto, w trójkącie prostokątnym AOS przeciwprostokątna AS jest dłuższa od przyprostokątnej AO.

Podsumowując, $AS>AO>AB$, czyli w dowolnym ostrosłupie prawidłowym siedmiokątnym krawędź boczna jest dłuższa od krawędzi podstawy.

9. Dodatnia liczba całkowita d jest dzielnikiem dodatniej liczby całkowitej a. Liczbę d zwiększono o 30% uzyskując w wyniku liczbę całkowitą będącą dzielnikiem liczby a. Wynika z tego, że liczba a jest podzielna przez

T	a) 10;
T	b) 13;
N	c) 30.

Komentarz

a) Zwiększając liczbę d o 30%, uzyskujemy liczbę $d+\frac{30}{100}d=\frac{13}{10}d$, która jest całkowita. Oznaczmy tę liczbę przez l. Wówczas $\frac{13}{10}d=l$, czyli $13d=10l$, a zatem 10 jest dzielnikiem liczby $13d$. Liczby 13 i 10 są względnie pierwsze (tzn. ich największy wspólny dzielnik jest równy 1). Wobec tego 10 jest dzielnikiem liczby d. Ponieważ d jest dzielnikiem liczby a, więc wynika stąd, że 10 jest dzielnikiem liczby a.

b) Zwiększając liczbę d o 30%, otrzymujemy liczbę $\frac{13}{10}d$, która jest dzielnikiem liczby a. Wobec tego istnieje taka dodatnia liczba całkowita k, że $a=\frac{13}{10}dk$. Mnożąc ostatnią zależność stronami przez 10, uzyskujemy $10a=13dk$. Stąd wniosek, że 13 jest dzielnikiem liczby $10a$. Ponieważ liczba 13 jest pierwsza, więc jest ona dzielnikiem liczby 10 lub liczby a. Pierwszy z tych przypadków nie jest spełniony. Wobec tego 13 jest dzielnikiem liczby a.

c) Przyjmijmy $a=130$ oraz $d=10$. Zwiększając liczbę d o 30%, otrzymujemy liczbę 13, będącą dzielnikiem liczby 130. Jednocześnie liczba 130 nie jest podzielna przez 30.

10. Dany jest trójkąt ABC, w którym $BC=AC$. Dwusieczna kąta BAC przecina odcinek BC w punkcie D. Wynika z tego, że kąt ADC jest

T a) równy $3\cdot\sphericalangle DAC$;

N b) większy od kąta ACB;

N c) mniejszy od kąta BAC.

Komentarz

a) Półprosta AD jest dwusieczną kąta BAC, skąd wynika, że $\sphericalangle DAB=\sphericalangle DAC$. Ponadto, $AC=BC$, a zatem $\sphericalangle ABC=\sphericalangle BAC=\sphericalangle DAB+\sphericalangle DAC=2\cdot\sphericalangle DAC$. Ponieważ kąt ADC jest kątem zewnętrznym trójkąta ABD, więc

$$\sphericalangle ADC=\sphericalangle DAB+\sphericalangle ABC=\sphericalangle DAC+2\cdot\sphericalangle DAC=3\cdot\sphericalangle DAC\,.$$

c) Wykazaliśmy przed chwilą, że $\sphericalangle ADC=3\cdot\sphericalangle DAC$, podczas gdy $\sphericalangle BAC=2\cdot\sphericalangle DAC$. Wobec tego kąt ADC jest większy od kąta BAC.

b) Rozpatrzmy trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ACB=120°$, $\sphericalangle CAB=30°$ i $\sphericalangle ABC=30°$. Wówczas $\sphericalangle DAC=15°$, więc $\sphericalangle ADC=3\cdot 15°=45°$, a zatem $\sphericalangle ACB>\sphericalangle ADC$.

11. Liczba $\dfrac{2}{1+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$ jest

N a) niewymierna;

T b) całkowita;

T c) większa od $\dfrac{2}{3}$.

Komentarz

Zauważmy, że

$$\frac{2}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{2\cdot(2+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})\cdot(2+\sqrt{3})}+\frac{1\cdot(1+\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})\cdot(1+\sqrt{3})}=$$
$$=\frac{4+2\sqrt{3}+1+\sqrt{3}}{5+3\sqrt{3}}=\frac{5+3\sqrt{3}}{5+3\sqrt{3}}=1\,.$$

12. Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ścian ABC i ABD odpowiednio w punktach K i L. Wynika z tego, że

T a) $AK=AL$;

T b) $\sphericalangle AKB=\sphericalangle ALB$;

N c) oba punkty K i L są środkami okręgów wpisanych w trójkąty ABC i ABD.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Komentarz

a) Oznaczmy przez O środek sfery. Wówczas $\sphericalangle OKA = 90° = \sphericalangle OLA$. Wobec tego, na mocy twierdzenia Pitagorasa, otrzymujemy

$$AK^2 = AO^2 - OK^2 = AO^2 - OL^2 = AL^2,$$

skąd $AK = AL$.

b) Wykazaliśmy wyżej, że $AK = AL$. Analogicznie wykazujemy, że $BK = BL$. Trójkąty ABK i ABL mają ponadto wspólny bok AB. Wobec tego trójkąty te są przystające (cecha bok-bok-bok), skąd wynika, że $\sphericalangle AKB = \sphericalangle ALB$.

c) Rozpatrzmy taki czworościan $ABCD$, że trójkąt ABC jest równoboczny, a trójkąt ABD prostokątny równoramienny o kącie prostym przy wierzchołku D. Przypuśćmy, że punkty K i L są środkami okręgów wpisanych w trójkąty ABC i ABD. Wtedy półproste AK i BK są odpowiednio dwusiecznymi kątów BAC i ABC, skąd wniosek, że $\sphericalangle BAK = \sphericalangle ABK = 30°$, więc $\sphericalangle AKB = 120°$. Analogicznie wykazujemy, że $\sphericalangle ALB = 135°$. A zatem $\sphericalangle AKB \neq \sphericalangle ALB$, wbrew udowodnionej wcześniej równości $\sphericalangle AKB = \sphericalangle ALB$. Z otrzymanej sprzeczności wynika, że oba punkty K i L nie mogą być jednocześnie środkami okręgów wpisanych w trójkąty ABC i ABD.

13. Na odcinku długości 1 wybrano trzy różne punkty dzieląc ten odcinek na cztery części. Wynika z tego, że

T a) długość co najmniej jednej z tych części jest większa od 1/5;

T b) suma długości pewnych dwóch z tych części jest nie mniejsza od 1/2;

N c) z pewnych trzech części można zbudować trójkąt.

Komentarz

Oznaczmy przez a, b, c i d długości czterech części, na które podzielono odcinek. Warunek dany w treści zadania oznacza, że $a+b+c+d=1$.

a) Przypuśćmy, że

$$a \leqslant \frac{1}{5}, \quad b \leqslant \frac{1}{5}, \quad c \leqslant \frac{1}{5} \quad \text{oraz} \quad d \leqslant \frac{1}{5}.$$

Dodając powyższe cztery nierówności stronami, otrzymujemy $a+b+c+d \leqslant 4/5$. Z otrzymanej sprzeczności wynika, że długość co najmniej jednej części jest większa od 1/5.

b) Przypuśćmy, że

$$a+b < \frac{1}{2}, \quad a+c < \frac{1}{2}, \quad a+d < \frac{1}{2}, \quad b+c < \frac{1}{2}, \quad b+d < \frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad c+d < \frac{1}{2}.$$

Dodając powyższe nierówności stronami, uzyskujemy

$$3a+3b+3c+3d < \frac{6}{2}, \quad \text{czyli} \quad a+b+c+d < 1.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, z której wynika, że suma długości pewnych dwóch części jest nie mniejsza od 1/2.

c) Przyjmijmy $a=1/10$, $b=1/10$, $c=3/10$, $d=5/10$. Wtedy $a+b+c+d=1$, lecz żadne trzy spośród tych czterech długości nie spełniają nierówności trójkąta.

14. Dane są takie liczby a, b, że $a>b$ oraz liczby $a(b+1)$ i $b(a+1)$ są wymierne. Wynika z tego, że

T a) liczba $a-b$ jest wymierna;

N b) liczba ab jest wymierna;

N c) obie liczby a i b są wymierne.

Komentarz

a) Liczby $a(b+1)$ i $b(a+1)$ są wymierne, a zatem ich różnica

$$a(b+1)-b(a+1)=ab+a-ab-b=a-b$$

również jest liczbą wymierną.

b), c) Przyjmijmy $a=\sqrt{2}$ oraz $b=\sqrt{2}-1$. Wówczas $a>b$, a ponadto liczby $a(b+1)$ oraz $b(a+1)$ są wymierne, gdyż

$$a(b+1)=\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}-1+1)=2, \qquad b(a+1)=(\sqrt{2}-1)\cdot(\sqrt{2}+1)=2-1=1.$$

Jednak wtedy liczby a i b oraz liczba

$$ab=\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}-1)=2-\sqrt{2}$$

nie są wymierne.

15. W czworościanie $ABCD$ kąty ABC i BCD są proste. Wynika z tego, że

T a) $AD\geqslant BC$;

N b) kąt CDA jest prosty;

T c) $AB^2+BD^2=AC^2+CD^2$.

Komentarz

a) Przez punkty B i C poprowadźmy odpowiednio płaszczyzny k i l prostopadłe do prostej BC. Wówczas płaszczyzny te są równoległe, a odległość między nimi jest równa długości odcinka BC. Ponadto punkt A należy do płaszczyzny k, a punkt D do płaszczyzny l. Stąd $AD\geqslant BC$.

b) Rozpatrzmy trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku B. Przez punkt C poprowadźmy prostą prostopadłą do płaszczyzny ABC i wybierzmy na niej punkt D, różny od punktu C. Wówczas czworościan $ABCD$ spełnia warunki zadania. Zauważmy jednak, że w trójkącie ACD kąt ACD jest prosty, a zatem kąt CDA jest mniejszy od $90°$.

c) Ponieważ trójkąt ABC jest prostokątny, więc na mocy twierdzenia Pitagorasa

$$AB^2+BC^2=AC^2\,, \quad \text{a zatem} \quad BC^2=AC^2-AB^2\,.$$

Podobnie, na mocy twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego BCD, otrzymujemy

$$BC^2+CD^2=BD^2\,, \quad \text{więc} \quad BC^2=BD^2-CD^2\,.$$

Wobec tego $AC^2-AB^2=BD^2-CD^2$, skąd wniosek, że $AB^2+BD^2=AC^2+CD^2$.