Matematyczna Olimpiada Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

VIII Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia pierwszego – część korespondencyjna

(1 września 2012 r. – 29 października 2012 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych

1. Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n, liczby

$$n,\ n^5,\ n^9,\ n^{13},\ n^{17},\ldots$$

mają jednakowe cyfry jedności.

Szkic rozwiązania

Zaczniemy od wykazania, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n, liczby n oraz n^5 mają jednakowe cyfry jedności.

Zauważmy, że jeśli cyfrą jedności liczby A jest cyfra a, a liczby B — cyfra b, to cyfrą jedności liczby AB jest cyfra jedności liczby ab. Opierając się na tym spostrzeżeniu możemy, znając cyfrę jedności liczby n, wyznaczyć kolejno cyfry jedności liczb n^2, n^4 i n^5. Wyniki przedstawia następująca tabela.

cyfra jedności liczby n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
cyfra jedności liczby n^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
cyfra jedności liczby n^4	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1
cyfra jedności liczby n^5	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Widzimy zatem, że w każdym z dziesięciu przypadków, cyfry jedności liczb n oraz n^5 są równe. Innymi słowy, liczba n^5-n jest podzielna przez 10.

Stąd wynika, że $10|n^4(n^5-n)$, czyli $10|n^9-n^5$. A zatem $10|n^4(n^9-n^5)$, czyli $10|n^{13}-n^9$. Kontynuując to rozumowanie dochodzimy do wniosku, że liczby

$$n,\ n^5,\ n^9,\ n^{13},\ n^{17},\ldots$$

mają jednakowe cyfry jedności.

Uwaga

Rozwiązanie opiera się na spostrzeżeniu, że liczba n^5-n jest podzielna przez 10. Inny dowód tej podzielności można znaleźć w artykule „O n kolejnych liczbach”, *Kwadrat* nr 5 (czerwiec 2012), zadanie 3.

---

2. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $AD+BC=CD$. Dwusieczne kątów BCD i CDA przecinają się w punkcie S. Udowodnij, że $AS=BS$.

Szkic rozwiązania

Niech E będzie takim punktem na odcinku CD, że $DE=AD$. Wówczas $CE=BC$. Trójkąty ADS i EDS są przystające (cecha bok-kąt-bok), a zatem $AS=ES$. Analogicznie z przystawania trójkątów BCS i ECS wynika, że $BS=ES$. Łącząc dwie ostatnie równości, uzyskujemy tezę.

---

3. Liczba naturalna n jest co najmniej trzycyfrowa. Jeżeli pomiędzy cyfrę setek a cyfrę dziesiątek tej liczby wpiszemy znak mnożenia, to po wykonaniu mnożenia otrzymamy połowę liczby n. Wyznacz wszystkie liczby n o tej własności.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI · Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej · MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ · ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji · UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Szkic rozwiązania

Liczbę n możemy zapisać w postaci $n=100a+b$, gdzie a jest dodatnią liczbą całkowitą, natomiast b — liczbą co najwyżej dwucyfrową. Wówczas warunek opisany w treści zadania przybiera postać równości

$$a\cdot b=\frac{1}{2}(100a+b)\,. \tag{1}$$

Przekształcając równoważnie tę zależność, uzyskujemy kolejno

$$\begin{aligned} 2ab&=100a+b\\ 2ab-100a-b+50&=50\\ (2a-1)(b-50)&=50\,. \end{aligned}$$

Stąd wynika, że liczba $2a-1$ jest dodatnim i nieparzystym dzielnikiem liczby 50, a zatem jest ona równa 1, 5 lub 25. Możliwe są więc trzy przypadki.

(1) Jeśli $2a-1=1$, to $b-50=50$. Wtedy jednak $b=100$, co stoi w sprzeczności z założeniem, że liczba b jest co najwyżej dwucyfrowa.
(2) Jeśli $2a-1=5$, to $b-50=10$, czyli $a=3$ oraz $b=60$.
(3) Jeśli $2a-1=25$, to $b-50=2$, czyli $a=13$ oraz $b=52$.

Istnieją zatem dwie liczby $n=\mathbf{360}$ oraz $n=\mathbf{1352}$, które spełniają warunki zadania.

Uwaga

Metodzie rozwiązywania równań typu (1) został poświęcony artykuł „Sztuczka z iloczynem”, *Kwadrat* nr 5 (czerwiec 2012).

---

4. W balu wzięło udział 102 królewiczów i 103 królewny. Po balu okazało się, że każdy królewicz zatańczył z taką samą liczbą królewien. Udowodnij, że pewne dwie królewny zatańczyły z taką samą liczbą królewiczów.

Szkic rozwiązania

Oznaczmy przez a_i liczbę królewiczów, z którymi zatańczyła i-ta królewna. Liczby a_i są całkowite i należą do przedziału $\langle 0,102\rangle$. Przypuśćmy, że każda królewna zatańczyła z inną liczbą królewiczów. Ciąg $a_1,a_2,...,a_{103}$ zawiera wówczas 103 różne liczby, czyli występuje w nim dokładnie jeden raz każda liczba całkowita z przedziału $\langle 0,102\rangle$. Wobec tego

$$a_1+a_2+...+a_{103}=0+1+...+102=\frac{102\cdot 103}{2}=5253\,,$$

a zatem na balu tańczyły 5253 różne pary.

Z drugiej strony, każdy królewicz zatańczył z taką samą liczbą królewien. Oznaczmy tę liczbę przez k. Stąd wynika, że na balu tańczyło $102\cdot k$ różnych par, czyli $5253=102\cdot k$. Otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż liczba 5253 nie jest podzielna przez 102.

Uwaga

Metoda rozwiązania polega na obliczeniu na dwa sposoby, ile różnych par tańczyło. Uzyskanie dwóch różnych wyników pozwala stwierdzić, że sytuacja, w której „każda królewna zatańczyła z inną liczbą królewiczów”, nie może mieć miejsca. Inne przykłady zastosowania tej metody można znaleźć w artykule „Oblicz dwoma sposobami”, *Kwadrat* nr 6 (wrzesień 2012).

---

5. Odcinki AD i BE są wysokościami trójkąta ostrokątnego ABC. Po zewnętrznej stronie trójkąta ABC zbudowano kwadrat $ABKL$ oraz prostokąty $BDMN$ i $AEPQ$, przy czym $BN=BC$ oraz $AQ=AC$. Udowodnij, że suma pól prostokątów $BDMN$ i $AEPQ$ jest równa polu kwadratu $ABKL$.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Szkic rozwiązania

Oznaczmy przez R i S punkty przecięcia wysokości trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka C odpowiednio z prostymi AB i KL. Trójkąty prostokątne AEB i ARC mają wspólny kąt przy wierzchołku A, a zatem są podobne. Wobec tego

$$\frac{AE}{AR}=\frac{AB}{AC}, \quad \text{więc} \quad AE\cdot AC=AR\cdot AB.$$

Podstawiając do ostatniej równości $AC=AQ$ oraz $AB=AL$, otrzymujemy

$$AE\cdot AQ=AR\cdot AL, \quad \text{czyli} \quad [AEPQ]=[ARSL],$$

gdzie $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$.

Analogicznie dowodzimy, że $[BDMN]=[BRSK]$. Dodając stronami dwie ostatnie równości, uzyskujemy tezę.

---

6. W ostrosłup $SABCD$, którego podstawą jest czworokąt wypukły $ABCD$, można wpisać sferę. Udowodnij, że $\sphericalangle ASB+\sphericalangle CSD=\sphericalangle BSC+\sphericalangle DSA$.

Szkic rozwiązania

Oznaczmy przez P, Q, R, T punkty styczności sfery odpowiednio ze ścianami ABS, BCS, CDS i ADS. Odcinki SP i SQ, o wspólnym końcu S, są styczne do danej sfery w punktach P i Q, a zatem $SP=SQ$. Analogicznie $BP=BQ$. Wobec tego trójkąty BSP i BSQ są przystające (cecha bok–bok–bok), skąd wynika, że $\sphericalangle BSP=\sphericalangle BSQ$.

Analogicznie dowodzimy, że $\sphericalangle CSR=\sphericalangle CSQ$, $\sphericalangle DSR=\sphericalangle DST$ oraz $\sphericalangle ASP=\sphericalangle AST$. Dodając otrzymane równości kątów stronami, otrzymujemy tezę.

---

7. Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite n, dla których liczba n^3-7n jest kwadratem liczby całkowitej.

Szkic rozwiązania

Rozważymy dwa przypadki.

(1) Liczba n nie jest podzielna przez 7. Wtedy liczby n i n^2-7 są względnie pierwsze. Istotnie: niech d będzie wspólnym dzielnikiem liczb n i n^2-7. Skoro $d\,|\,n$, to $d\,|\,n^2$, a zatem d jest dzielnikiem liczby $n^2-(n^2-7)=7$. Z założenia wiemy, że $d\neq 7$, więc $d=1$.

Ponieważ liczba $n^3-7n=n(n^2-7)$ jest kwadratem liczby całkowitej, a liczby n i n^2-7 są względnie pierwsze, więc $n=a^2$ i $n^2-7=b^2$, gdzie a i b są pewnymi nieujemnymi liczbami całkowitymi. A zatem $a^4-7=b^2$, czyli $(a^2-b)(a^2+b)=7$. Stąd wyznaczamy $a^2=4$, $b=3$ oraz bezpośrednio sprawdzamy, że liczba $n=a^2=4$ spełnia warunki zadania.

(2) Liczba n jest podzielna przez 7. Niech $n=7m$, gdzie m jest dodatnią liczbą całkowitą. Wówczas $n^3-7n=49m(7m^2-1)$, skąd wynika, że liczba $m(7m^2-1)$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Podobnie jak wyżej dowodzimy, że liczby m i $7m^2-1$ są względnie pierwsze, więc $m=c^2$ i $7m^2-1=d^2$, gdzie c i d są pewnymi nieujemnymi liczbami całkowitymi. A zatem $7c^4-1=d^2$, czyli $7c^4=d^2+1$. Analizując reszty z dzielenia liczby d przez 7, dochodzimy do wniosku, że liczba d^2+1 nie może być podzielna przez 7. Ten przypadek prowadzi zatem do sprzeczności.

Ostatecznie jedyną liczbą spełniająca warunki zadania jest $n=\mathbf{4}$.

Uwaga

Powyższe rozwiązanie opiera się na spostrzeżeniu, że jeśli dodatnie liczby całkowite a i b są względnie pierwsze, a ich iloczyn jest kwadratem liczby całkowitej, to wówczas każda z liczb a i b jest kwadratem liczby całkowitej. Uzasadnienie tej własności znajduje się w rozwiązaniach zadań części testowej tegorocznej edycji OMG (zadanie 7).
