# VIII Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

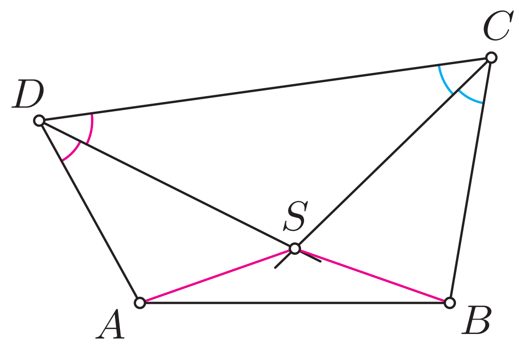
## Zadania konkursowe zawodów pierwszego stopnia — część korespondencyjna

### (1 września – 29 października 2012 r.)

**1.** Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej $n$, liczby

$$n,\ n^5,\ n^9,\ n^{13},\ n^{17},\ldots$$

mają jednakowe cyfry jedności.



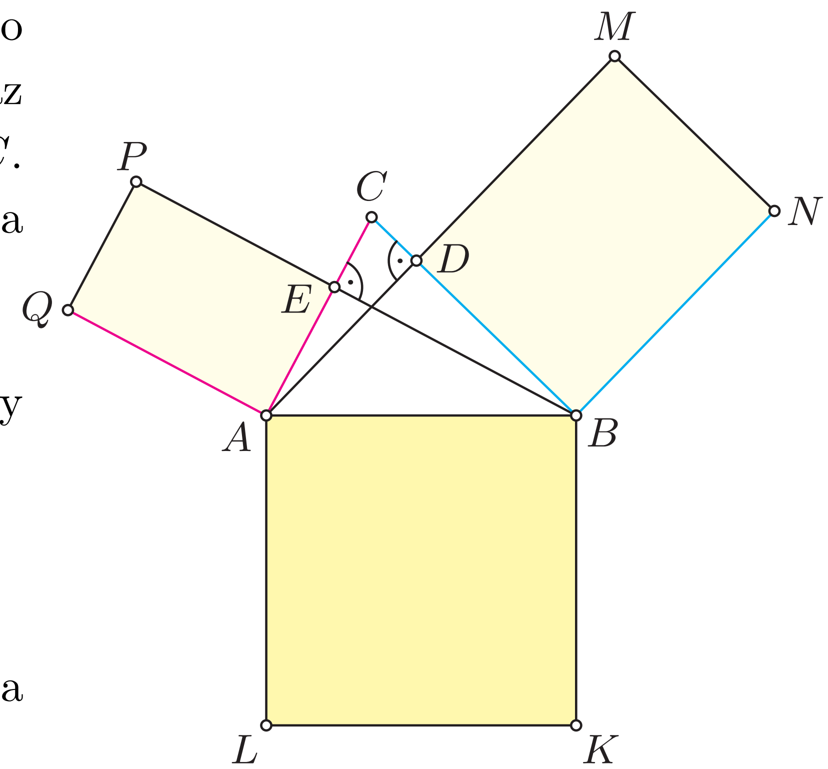
Zadanie 2.

**2.** Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $AD+BC=CD$. Dwusieczne kątów $BCD$ i $CDA$ przecinają się w punkcie $S$. Udowodnij, że $AS=BS$.

**3.** Liczba naturalna $n$ jest co najmniej trzycyfrowa. Jeżeli pomiędzy cyfrę setek a cyfrę dziesiątek tej liczby wpiszemy znak mnożenia, to po wykonaniu mnożenia otrzymamy połowę liczby $n$. Wyznacz wszystkie liczby $n$ o tej własności.

**4.** W balu wzięło udział 102 królewiczów i 103 królewny. Po balu okazało się, że każdy królewicz zatańczył z taką samą liczbą królewien. Udowodnij, że pewne dwie królewny zatańczyły z taką samą liczbą królewiczów.

**5.** Odcinki $AD$ i $BE$ są wysokościami trójkąta ostrokątnego $ABC$. Po zewnętrznej stronie trójkąta $ABC$ zbudowano kwadrat $ABKL$ oraz prostokąty $BDMN$ i $AEPQ$, przy czym $BN=BC$ oraz $AQ=AC$. Udowodnij, że suma pól prostokątów $BDMN$ i $AEPQ$ jest równa polu kwadratu $ABKL$.



Zadanie 5.

**6.** W ostrosłup $SABCD$, którego podstawą jest czworokąt wypukły $ABCD$, można wpisać sferę. Udowodnij, że

$$\sphericalangle ASB+\sphericalangle CSD=\sphericalangle BSC+\sphericalangle DSA.$$

**7.** Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite $n$, dla których liczba $n^3-7n$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego