VIII Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody drugiego stopnia
(5 stycznia 2013 r.)

1. Wyznacz wszystkie pary (a,b) liczb całkowitych spełniających warunki

$$a < b < 2013 \quad \text{oraz} \quad a + b = 4020\,.$$

2. Czy istnieje taki trójkąt ostrokątny, w którym długości wszystkich boków i wszystkich wysokości są liczbami całkowitymi? Odpowiedź uzasadnij.

3. Wykaż, że jeśli liczby a i b są dodatnie i mniejsze od 1, to

$$a \cdot \sqrt{b} + b \cdot \sqrt{a} + 1 > 3ab\,.$$

4. Każdy punkt płaszczyzny należy pomalować na pewien kolor w taki sposób, aby każda prosta była jednokolorowa lub dwukolorowa. Jaka jest największa możliwa liczba kolorów, których można użyć do pomalowania punktów tej płaszczyzny? Odpowiedź uzasadnij.

5. Wyznacz wszystkie pary liczb pierwszych (p,q), dla których liczba

$$p^2 + pq + q^2$$

jest kwadratem liczby całkowitej.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego