VII Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia trzeciego
(17 marca 2012 r.)

1. Wyznacz wszystkie takie liczby rzeczywiste x, dla których liczby $x+\sqrt{3}$ oraz $x^2+\sqrt{3}$ są wymierne.

2. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkty K i L są odpowiednio środkami boków BC i AD. Symetralne odcinków AB i CD przecinają odcinek KL odpowiednio w punktach P i Q. Wykaż, że jeżeli $KP=LQ$, to proste AB i CD są równoległe.

3. Dane są takie dodatnie liczby całkowite a, b, że iloczyn ab jest podzielny przez sumę $a+b$. Niech d będzie największym wspólnym dzielnikiem liczb a i b. Udowodnij, że

$$d \geqslant \sqrt{a+b}\,.$$

4. Dana jest dodatnia liczba całkowita n. Wykaż, że w zapisie dziesiętnym liczby

$$\sqrt{100^n+2}$$

na n-tym miejscu po przecinku jest cyfra 0.

5. Czy na powierzchni każdego czworościanu można wskazać takie cztery punkty, które są wierzchołkami kwadratu i z których żadne dwa nie leżą na jednej ścianie tego czworościanu? Odpowiedź uzasadnij.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego