Matematyczna Olimpiada Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

VII Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia drugiego

(7 stycznia 2012 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych

1. Wyznacz wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych a, b, których iloczyn ab jest podzielny przez 175, a suma $a+b$ równa się 175.

Szkic rozwiązania

Dzielnikami pierwszymi liczby 175 są liczby 5 i 7. Wobec tego liczba ab jest podzielna przez 5, skąd wynika, że liczba a lub liczba b jest podzielna przez 5. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że liczba a jest podzielna przez 5. Ponieważ $b=175-a$, więc liczba b także jest podzielna przez 5. Stąd wniosek, że obie liczby są podzielne przez 5.

Podobnie dowodzimy, że liczby a i b są podzielne przez 7. Wobec tego liczby a i b są podzielne przez 35, czyli istnieją dodatnie liczby całkowite k i l, dla których $a=35k$ oraz $b=35l$. Stąd wynika, że $35(k+l)=175$. A zatem $k+l=5$, więc (k,l) jest jedną z czterech par: $(1,4)$, $(2,3)$, $(3,2)$, $(4,1)$. Uzyskujemy stąd

$$(a,b)=(35,140), \quad (a,b)=(70,105), \quad (a,b)=(105,70) \quad \text{lub} \quad (a,b)=(140,35).$$

Bezpośrednio sprawdzamy, że wszystkie cztery powyższe pary liczb (a,b) spełniają warunki zadania.

---

2. W pewnym turnieju uczestniczyło 6 drużyn. Każda drużyna rozegrała z każdą inną dokładnie jeden mecz. Za zwycięstwo w meczu drużyna otrzymywała 3 punkty, za porażkę 0 punktów, a za remis 1 punkt. Po turnieju okazało się, że suma punktów zdobytych przez wszystkie drużyny wynosi 41. Wykaż, że istnieją takie cztery drużyny, z których każda co najmniej jeden raz zremisowała.

Szkic rozwiązania

Oznaczmy przez r liczbę meczów, które zakończyły się remisem. Zauważmy, że wszystkich meczów było 15, czyli $15-r$ meczów zakończyło się wygraną jednej z drużyn. Suma punktów zdobytych przez wszystkie drużyny wynosi zatem $2\cdot r+3\cdot(15-r)$. Wobec tego $2\cdot r+3\cdot(15-r)=41$, skąd wynika, że $r=4$.

Przypuśćmy, że nie istnieją takie cztery drużyny, z których każda co najmniej jeden raz zremisowała. Wówczas pewne trzy drużyny nie zremisowały ani razu. Pozostałe trzy drużyny rozegrały między sobą dokładnie trzy mecze. Stąd wniosek, że co najwyżej trzy mecze zakończyły się remisem. Otrzymana sprzeczność kończy rozwiązanie zadania.

---

3. Czy istnieje taki trójkąt o bokach długości a, b, c, którego pole jest równe $\frac{1}{4}(ab+bc)$? Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania

Wykażemy, że taki trójkąt nie istnieje.

Przypuśćmy, że istnieje trójkąt o bokach długości a, b, c i polu równym $\frac{1}{4}(ab+bc)$. Oznaczmy przez h wysokość tego trójkąta opuszczoną na bok b. Wówczas

$$\frac{1}{2}bh=\frac{1}{4}(ab+bc), \quad \text{czyli} \quad h=\frac{1}{2}(a+c).$$

Z drugiej strony $h\leqslant a$ i $h\leqslant c$ oraz przynajmniej jedna z tych nierówności jest ostra (w przeciwnym razie trójkąt ten miałby dwa kąty proste). Wobec tego $2h<a+c$, a zatem $h<\frac{1}{2}(a+c)$. Otrzymaliśmy sprzeczność.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

4. Wyznacz wszystkie trójki (a,b,c) liczb nieujemych i nie większych od 1, dla których spełniona jest równość $a+b+c=ab+bc+ca$.

Szkic rozwiązania

Rozważymy trzy przypadki:

(a) Wszystkie trzy liczby a, b, c są dodatnie i mniejsze od 1. Mnożąc nierówność $1>b$ stronami przez liczbę dodatnią a, otrzymujemy $a>ab$. Podobnie dowodzimy, że $b>bc$ oraz $c>ca$. Stąd wynika, że $a+b+c>ab+bc+ca$, czyli w tym przypadku dane równanie nie ma rozwiązań.

(b) Co najmniej jedna z liczb a, b, c jest równa 1. Bez straty ogólności możemy założyć, że $a=1$. Wówczas $1+b+c=b+bc+c$, czyli $1=bc$, więc $b=c=1$. Zadaną równość spełnia w tym przypadku wyłącznie trójka $(1,1,1)$.

(c) Co najmniej jedna z liczb a, b, c jest równa 0. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $a=0$. Wówczas $b+c=bc$. Ponieważ $bc\leqslant b$, więc $b+c\leqslant b$, a zatem $c=0$. Wtedy również $b=0$. Zadaną równość spełnia w tym przypadku wyłącznie trójka $(0,0,0)$.

Odp.: Dana równość jest spełniona jedynie dla trójek $(1,1,1)$ oraz $(0,0,0)$.

---

5. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym

$$\sphericalangle DAB+\sphericalangle BCD=\sphericalangle ABC\,.$$

Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Wykaż, że punkt O jest jednakowo odległy od prostych AD i CD.

Szkic rozwiązania

Przeprowadzimy rozumowanie w przypadku, gdy oba kąty DAB i BCD są ostre. Dowód w pozostałych przypadkach przebiega analogicznie.

Oznaczmy przez E taki punkt na półprostej AD, że $\sphericalangle DAB=\sphericalangle ABE$. Niech F będzie punktem przecięcia prostych CD i BE. Wówczas $\sphericalangle BCD=\sphericalangle FBC$. Wobec tego trójkąty ABE oraz BCF są równoramienne.

Punkt O jest punktem przecięcia symetralnych odcinków AB i BC, które są jednocześnie dwusiecznymi kątów AEB i BFC.

Jeśli $D=E$, to $E=F=O$ i teza zadania jest oczywiście spełniona.

Przyjmijmy zatem, że punkty D i E są różne. Punkt O leży wówczas na dwusiecznych kątów DEF i DFE trójkąta DEF. Stąd wniosek, że jest on środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt, czyli jest jednakowo odległy od prostych AD i CD.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego