Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Liga zadaniowa 2012/2013
Seria VII (styczeń 2013)

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

31. Udowodnij, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n liczba $(3n)!$ jest podzielna przez $n!\cdot(2n+1)!$

32. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele par nieujemnych liczb całkowitych n, k, gdzie $n \geqslant k+2$, spełniających zależność

$$3\cdot\binom{n}{k}=\binom{n}{k+2}.$$

33. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ spełnione są następujące równości odcinków: $BD=CE$, $DF=EA$, $FB=AC$. Wykaż, że symetralne boków BC, DE, FA przecinają się w jednym punkcie.

34. Dany jest czworościan $ABCD$. Punkty A', B' i C' leżą odpowiednio na krawędziach AD, BD i CD. Odcinki BC' i CB' przecinają się w punkcie K, odcinki CA' i AC' — w punkcie L, natomiast odcinki AB' i BA' — w punkcie M. Udowodnij, że proste AK, BL i CM mają punkt wspólny.

35. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele czwórek dodatnich liczb całkowitych a, b, c, d spełniających równanie

$$a^4+b^{44}+c^{50}=d^4$$

oraz warunek $\mathrm{NWD}(a,b,c,d)=1$.

Urszula Pastwa
Kierownik naukowy obozu