Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Liga zadaniowa 2012/2013

Seria VIII (luty 2013) — rozwiązania zadań

36. *Dla których dodatnich liczb całkowitych n prawdziwe jest poniższe twierdzenie?*

Dla dowolnych liczb rzeczywistych x_1, x_2, x_3, ..., x_n, spełniających nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + 13\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant 3\sum_{i=1}^{n} x_i + n^2, \tag{1}$$

zachodzi nierówność

$$6\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + 9\sum_{i=1}^{n} x_i < 4n + n^2. \tag{2}$$

Rozwiązanie

Udowodnimy najpierw, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n i dowolnych liczb rzeczywistych x_1, x_2, x_3, ..., x_n, spełniających nierówność (1), prawdziwa jest słaba wersja nierówności (2), a mianowicie

$$6\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + 9\sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant 4n + n^2. \tag{3}$$

W tym celu zauważmy, że nierówność (3) otrzymujemy z nierówności (1) przez dodanie do niej stronami nierówności

$$-\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + 6\sum_{i=1}^{n} x_i^3 - 13\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 9\sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant -3\sum_{i=1}^{n} x_i + 4n. \tag{4}$$

Nierówność (4) możemy przekształcić do równoważnych postaci:

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^4 - 6\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + 13\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 12\sum_{i=1}^{n} x_i + 4n,$$

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^4 - 6x_i^3 + 13x_i^2 - 12x_i + 4\right),$$

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left((x_i-1)^2 \cdot (x_i-2)^2\right). \tag{5}$$

Nierówność (5) jest prawdziwa, gdyż suma kwadratów liczb rzeczywistych jest nieujemna. Zatem nierówność (4) jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych x_1, x_2, x_3, ..., x_n, a w konsekwencji udowodniliśmy, że nierówność (3) wynika z nierówności (1).

Pozostaje zbadać, kiedy, przy założeniu prawdziwości (1), w nierówności (3) zachodzi równość. Otóż ma to miejsce tylko wtedy, gdy obie nierówności (1) oraz (5) są równościami. Łatwo widać, że nierówność (5) staje się równością wtedy i tylko wtedy, gdy każda z liczb x_1, x_2, x_3, ..., x_n jest równa 1 lub 2. Z kolei nierówność (1) można przepisać w postaci

$$\sum_{i=1}^{n} \left(x_i^4 + 13x_i^2 - 3x_i\right) \leqslant n^2. \tag{6}$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI · Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej · MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ · Ośrodek Rozwoju Edukacji · UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zauważmy, że jeżeli $x_i = 1$, to $x_i^4 + 13x_i^2 - 3x_i = 11$, a jeżeli $x_i = 2$, to $x_i^4 + 13x_i^2 - 3x_i = 62$. Jeżeli więc wśród liczb $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ jest k liczb równych 2 oraz $n-k$ równych 1, to lewa strona nierówności (6) ma wartość

$$k \cdot 62 + (n-k) \cdot 11 = 11 \cdot n + 51 \cdot k.$$

Należy zatem wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite n, dla których istnieje nieujemna liczba całkowita $k \leqslant n$, spełniająca równanie $11 \cdot n + 51 \cdot k = n^2$, czyli

$$51 \cdot k = n \cdot (n-11)$$

lub inaczej

$$\frac{k}{n} = \frac{n-11}{51}. \tag{7}$$

Wobec równości (7), nierówności $0 \leqslant k \leqslant n$ są równoważne nierównościom $0 \leqslant n - 11 \leqslant 51$, czyli $11 \leqslant n \leqslant 62$.

Szukamy więc takich liczb n, że $11 \leqslant n \leqslant 62$, a ponadto liczba $n \cdot (n-11)$ jest podzielna przez 51. Liczba $n \cdot (n-11)$ jest podzielna przez $51 = 3 \cdot 17$ w następujących przypadkach:

1° Liczba n jest podzielna przez 51. To prowadzi do $n = 51$.

2° Liczba $n-11$ jest podzielna przez 51. To prowadzi do $n = 11$ oraz $n = 62$.

3° Liczba n jest podzielna przez 17, a liczba $n-11$ jest podzielna przez 3. To prowadzi do $n = 17$.

4° Liczba $n-11$ jest podzielna przez 17, a liczba n jest podzielna przez 3. To prowadzi do $n = 45$.

Podsumujmy: dla dowolnego n i dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, z nierówności (1) wynika nierówność (3), a przy tym równość w (3) może zajść tylko dla pięciu wartości n. Dla pozostałych n zachodzi ostra nierówność (3), czyli (2).

Odpowiedź

Warunki zadania spełniają wszystkie dodatnie liczby całkowite n za wyjątkiem następujących pięciu liczb: 11, 17, 45, 51, 62.

---

37. *Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych m, n liczba $(3m)! \cdot (3n)!$ jest podzielna przez $m! \cdot n! \cdot ((m+n)!)^2$.*

Rozwiązanie

Dla dowodu podanej w treści zadania podzielności wystarczy wykazać, że dowolna liczba pierwsza p wchodzi do rozkładu liczby $m! \cdot n! \cdot ((m+n)!)^2$ na czynniki pierwsze z wykładnikiem nie większym niż do rozkładu liczby $(3m)! \cdot (3n)!$.

Skorzystamy z następującego lematu, którego dowód znajduje się w rozwiązaniu zadania 31 z Ligi OMG (seria VII, styczeń 2013):

Lemat

Liczba pierwsza p występuje w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby $N!$ z wykładnikiem

$$\left[\frac{N}{p}\right] + \left[\frac{N}{p^2}\right] + \left[\frac{N}{p^3}\right] + \left[\frac{N}{p^4}\right] + \ldots,$$

gdzie $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od liczby x.

Uwaga

Powyższa suma jest skończona, gdyż od pewnego miejsca występujące w niej składniki są równe 0.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Wobec powyższego, w celu rozwiązania zadania należy udowodnić, że dla dowolnej liczby pierwszej p i dowolnych dodatnich liczb całkowitych m, n zachodzi nierówność

$$\left[\frac{m}{p}\right]+\left[\frac{m}{p^2}\right]+\left[\frac{m}{p^3}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\ldots+2\cdot\left[\frac{m+n}{p}\right]+2\cdot\left[\frac{m+n}{p^2}\right]+2\cdot\left[\frac{m+n}{p^3}\right]+\ldots\leqslant$$
$$\leqslant\left[\frac{3m}{p}\right]+\left[\frac{3m}{p^2}\right]+\left[\frac{3m}{p^3}\right]+\ldots+\left[\frac{3n}{p}\right]+\left[\frac{3n}{p^2}\right]+\left[\frac{3n}{p^3}\right]+\ldots$$

Wystarczy, jeśli wykażemy, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność

$$[x]+[y]+2\cdot[x+y]\leqslant[3x]+[3y]\,. \tag{8}$$

Niech $s=x-[x]$ oraz $t=y-[y]$ będą częściami ułamkowymi odpowiednio liczb x i y. Wówczas $0\leqslant s<1$, $0\leqslant t<1$, a ponadto

$$[x]+[y]+2\cdot[x+y]=[x]+[y]+2\cdot([x]+[y]+[s+t])=3\cdot[x]+3\cdot[y]+2\cdot[s+t]$$

oraz

$$[3x]+[3y]=3\cdot[x]+[3s]+3\cdot[y]+[3t]\,.$$

Zatem dla dowodu nierówności (8) wystarczy wykazać, że

$$2\cdot[s+t]\leqslant[3s]+[3t]\,. \tag{9}$$

Jeżeli $s+t<1$, to lewa strona nierówności (9) jest równa 0, a prawa jest nieujemna, nierówność ta jest więc prawdziwa.

Pozostaje do rozpatrzenia przypadek, gdy $s+t\geqslant 1$. Z nierówności $s+t<2$ otrzymujemy $[s+t]=1$, skąd wynika, że lewa strona nierówności (9) jest równa 2. Bez szkody dla ogólności rozumowania możemy założyć, że $s\geqslant t$. Jeżeli $s\geqslant 2/3$, to $2\leqslant 3s<3$, czyli $[3s]=2$. Wtedy $2\cdot[s+t]=[3s]$ i nierówność (9) jest prawdziwa. Jeśli zaś $s<2/3$, to $t>1/3$. Wówczas $1/3<t\leqslant s<2/3$ i w konsekwencji $[3s]=[3t]=1$, a zatem obie strony nierówności (9) są równe 2.

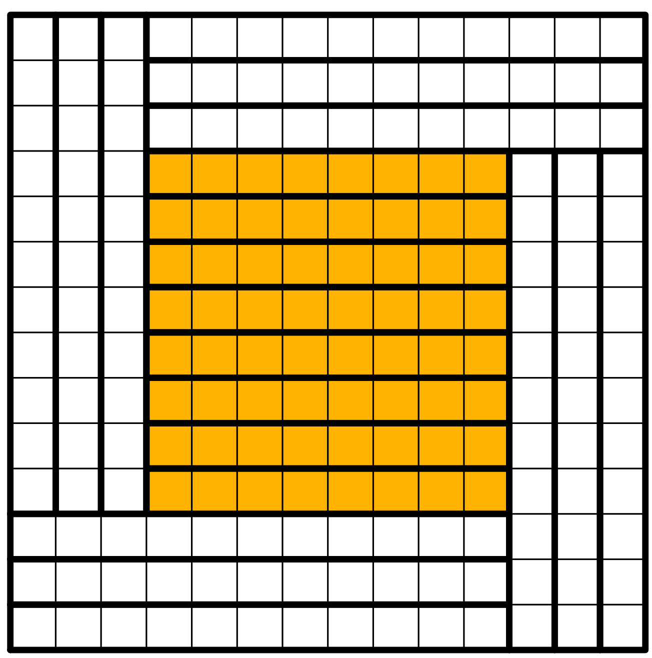
Tak więc udowodniliśmy nierówność (9), co kończy rozwiązanie zadania.

---

38. *Rozstrzygnij, czy sześcian o krawędzi 14 można wypełnić prostopadłościennymi klockami o wymiarach* $1\times1\times8$ *oraz* $1\times1\times11$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że kwadrat o boku 14 można podzielić na prostokąty 1×8 (żółte) oraz 1×11 (białe) jak na rysunku 1. To oznacza, że prostopadłościan $1\times14\times14$ można wypełnić klockami $1\times1\times8$ oraz $1\times1\times11$. Ponieważ sześcian o krawędzi 14 można podzielić na 14 takich prostopadłościanów, także ten sześcian daje się wypełnić opisanymi w zadaniu klockami.



rys. 1

39. *Rozstrzygnij, czy sześcian o krawędzi 15 można wypełnić prostopadłościennymi klockami o wymiarach* $1\times1\times8$ *oraz* $1\times1\times11$.

Rozwiązanie
Udowodnimy, że takie wypełnienie sześcianu nie jest możliwe.

Najpierw poszukamy 15-wyrazowego ciągu liczb $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{15})$ o następujących własnościach:
(a) suma dowolnych 8 kolejnych wyrazów jest równa 0,
(b) suma dowolnych 11 kolejnych wyrazów jest równa 0,
(c) suma wszystkich 15 wyrazów jest różna od 0.

Z własności (a) oraz (b) wynika, że ciąg jest okresowy o okresie 8 i jednocześnie okresowy o okresie 11. W konsekwencji

$$a_1=a_9,\quad a_2=a_{10},\quad a_3=a_{11},\quad a_4=a_{12},\quad a_5=a_{13},\quad a_6=a_{14},\quad a_7=a_{15}$$

oraz

$$a_1=a_{12},\quad a_2=a_{13},\quad a_3=a_{14},\quad a_4=a_{15},$$

co po uporządkowaniu sprowadza się do

$$a_1=a_4=a_7=a_9=a_{12}=a_{15},\quad a_2=a_5=a_{10}=a_{13},\quad a_3=a_6=a_{11}=a_{14}.$$

Należy zwrócić uwagę, że w powyższych równościach nie występuje wyraz a_8.

Po oznaczeniu a_1, a_2, a_3, a_8 odpowiednio przez x, y, z, t, możemy zapisać ciąg w postaci

$$(x,\ y,\ z,\ x,\ y,\ z,\ x,\ t,\ x,\ y,\ z,\ x,\ y,\ z,\ x).$$

Warunki (a), (b) i (c) wyglądają wówczas tak:

$$\begin{cases} 3x+2y+2z+t=0 \\ 4x+3y+3z+t=0 \\ 6x+4y+4z+t\neq0. \end{cases}$$

Odejmując stronami pierwszą równość od drugiego i trzeciego warunku, otrzymujemy

$$\begin{cases} 3x+2y+2z+t=0 \\ x+y+z=0 \\ 3x+2y+2z\neq0. \end{cases}$$

Odjęcie stronami podwojonej drugiej równości od pierwszego i trzeciego warunku prowadzi do

$$\begin{cases} x+t=0 \\ x+y+z=0 \\ x\neq0. \end{cases}$$

Jednym z wielu rozwiązań powyższego układu jest $x=1$, $t=-1$, $y=-1$, $z=0$, co daje ciąg

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{15})=(1,\ -1,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 1)$$

o sumie wszystkich 15 wyrazów równej 1.

Podzielmy teraz sześcian o krawędzi 15 na 15^3 sześcianów jednostkowych. Położenie każdego sześcianu jednostkowego określamy trójką współrzędnych całkowitych z zakresu od 1 do 15. Sześcianowi o współrzędnych $(i,\ j,\ k)$ przypiszmy iloczyn $a_ia_ja_k$. Wówczas każdy klocek o wymiarach $1\times1\times8$ lub $1\times1\times11$ ułożony tak, aby pokrywał odpowiednio 8 lub 11 sześcianów, pokrywa sześciany o sumie przypisanych liczb równej 0. Wynika to ze spostrzeżenia, że pokrywane przez klocek sześciany mają na jednej współrzędnej kolejne liczby, podczas gdy na każdej z pozostałych dwóch współrzędnych wszystkie sześciany pokrywane przez ten klocek mają tę samą liczbę. Przykładowo, dla klocka pokrywającego sześciany jednostkowe o współrzędnych

$$(i,j,k),\ (i,j{+}1,k),\ (i,j{+}2,k),\ (i,j{+}3,k),\ (i,j{+}4,k),\ (i,j{+}5,k),\ (i,j{+}6,k),\ (i,j{+}7,k),$$

suma liczb przypisanych tym sześcianom jest równa

$$a_ia_ja_k+a_ia_{j+1}a_k+a_ia_{j+2}a_k+a_ia_{j+3}a_k+a_ia_{j+4}a_k+a_ia_{j+5}a_k+a_ia_{j+6}a_k+a_ia_{j+7}a_k=$$
$$=a_i\cdot(a_j+a_{j+1}+a_{j+2}+a_{j+3}+a_{j+4}+a_{j+5}+a_{j+6}+a_{j+7})\cdot a_k=a_i\cdot0\cdot a_k=0.$$

Tymczasem suma liczb przypisanych wszystkim 15^3 sześcianom jest równa

$$\sum_{i=1}^{15}\sum_{j=1}^{15}\sum_{k=1}^{15}a_ia_ja_k=\left(\sum_{i=1}^{15}a_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{15}a_j\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{15}a_k\right)=(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{15})^3=1^3=1.$$

Stąd wniosek, że niemożliwe jest wypełnienie sześcianu o krawędzi 15 przy użyciu klocków $1\times1\times8$ oraz $1\times1\times11$.

---

40. *Proste PA i PB są styczne do okręgu o odpowiednio w punktach A i B. Punkt F jest rzutem prostokątnym punktu B na średnicę AE okręgu o. Wykaż, że środek odcinka BF leży na prostej EP.*

Rozwiązanie

Niech X będzie punktem przecięcia prostych AP i BE. Ponieważ kąt ABE jest prosty jako kąt wpisany w okrąg o oparty na średnicy, to również kąt ABX jest prosty. Wiemy też, że $PA=PB$, jako odcinki styczne do okręgu o. Wobec tego punkt P leży na przecięciu przeciwprostokątnej XA trójkąta XAB i symetralnej jego boku AB, jest więc środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie. Stąd punkt P jest również środkiem odcinka XA.

Proste XA i BF są równoległe, ponieważ obie są prostopadłe do prostej AE. Ponadto punkt E jest punktem przecięcia prostych XB i AF. W takim razie istnieje jednokładność o środku E, przekształcająca odcinek XA na odcinek BF. Punkt P, jako środek odcinka XA, przechodzi w tej jednokładności na środek odcinka BF. Stąd punkty E, P i środek odcinka BF są współliniowe jako, odpowiednio, środek jednokładności, punkt i jego obraz.

Urszula Pastwa
Kierownik naukowy obozu