

# Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Liga zadaniowa 2012/2013

Seria IX (marzec 2013)



**41.** Dana jest dodatnia liczba całkowita  $n$  oraz takie liczby całkowite  $a, b$ , że liczba  $a - b$  jest podzielna przez  $n$ . Udowodnij, że liczba  $a^n - b^n$  jest podzielna przez  $n^2$ .

**42.** Wyznacz wszystkie takie dodatnie liczby całkowite  $n$ , że równanie

$$\frac{x^2}{x+1} + \frac{y^2}{y+1} + \frac{z^2}{z+1} = n$$

ma rozwiązanie w dodatnich liczbach całkowitych  $x, y, z$ .

**43.** Dane są takie punkty  $A, B, C, X, Y$ , że punkty  $A, B, C$  leżą po tej samej stronie prostej  $XY$  oraz zachodzą następujące równości kątów:

$$\sphericalangle AXY = \sphericalangle YBX = \sphericalangle XYC,$$

$$\sphericalangle XYA = \sphericalangle BXY = \sphericalangle YCX.$$

Wykaż, że trójkąt  $ABC$  jest podobny do trójkąta  $AXY$ .

**44.** Dany jest czworościan  $ABCD$ . Udowodnij, że krawędzie  $AB$  i  $CD$  są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki równoległobok  $CDPQ$ , że  $PA = PB = PD$  oraz  $QA = QB = QC$ .

**45.** Ciocia ma 8 woreczków z cukierkami. W każdym woreczku znajduje się nie mniej niż 79 i nie więcej niż 97 cukierków. Udowodnij, że ciocia może obdarować Stasia i Zosię tak, aby każde z dzieci dostało woreczki zawierające łącznie taką samą liczbę cukierków.



Urszula Pastwa  
Kierownik naukowego obozu

