Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

Kwadrat

Nr 8
marzec 2013

Gazetka Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Maksymalny, ale czy największy?

W zawodach drugiego stopnia tegorocznej edycji OMG wiele kłopotów sprawiło zawodnikom zadanie 4. Przypomnijmy jego treść:

Każdy punkt płaszczyzny należy pomalować na pewien kolor w taki sposób, aby każda prosta była jednokolorowa lub dwukolorowa. Jaka jest największa możliwa liczba kolorów, których można użyć do pomalowania punktów tej płaszczyzny?

Wiele rozwiązań zawierało pewne powtarzające się błędy. Oto jedno z błędnych rozumowań, które można było znaleźć w pracach uczestników.

Na początku kolorujemy płaszczyznę *trzema* kolorami w taki sposób, aby każda prosta była jednokolorowa lub dwukolorowa. Można to zrobić na wiele sposobów, na przykład tak: najpierw malujemy całą płaszczyznę jednym kolorem (powiedzmy niebieskim), następnie jedną wybraną prostą ℓ przemalowujemy na drugi kolor (zielony) i wreszcie na tej prostej wybieramy punkt i malujemy go trzecim kolorem (czerwonym).

Wykażemy teraz, że nie da się pomalować płaszczyzny *czterema* kolorami w sposób opisany w treści zadania. Zauważmy, że przemalowując w opisanym kolorowaniu dowolny punkt (oprócz punktu czerwonego) na czwarty kolor (na przykład żółty), otrzymamy kolorowanie, które nie spełnia warunków zadania. Istotnie, jeśli pomalujemy na żółto którykolwiek punkt zielony, to prosta ℓ będzie trzykolorowa (będą na niej pozostałe punkty zielone oraz punkt czerwony i żółty). Jeśli natomiast pomalujemy na kolor żółty którykolwiek punkt niebieski, to prosta przechodząca przez punkty czerwony i żółty będzie trzykolorowa (będą bowiem na niej punkty niebieskie oraz punkt czerwony i żółty). Z kolei przemalowanie czerwonego punktu na kolor żółty nic nie zmienia: płaszczyzna w dalszym ciągu jest pomalowana trzema kolorami. W ten sposób wykazaliśmy, że największą możliwą liczbą kolorów jest 3.

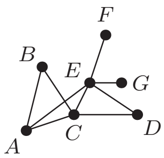
Na czym polegają błędy w tym rozumowaniu? Po pierwsze na tym, że próbujemy przemalować tylko jeden punkt. W taki sam sposób moglibyśmy także „udowodnić”, że największą możliwą liczbą kolorów jest 2. Rozpatrzmy bowiem następujące kolorowanie: jeden punkt malujemy na czerwono, a pozostałe na niebiesko. Teraz zauważmy, że żadnego punktu płaszczyzny nie można przemalować na żółto, aby w dalszym ciągu każda prosta zawierała punkty co najwyżej dwóch kolorów i jednocześnie były wykorzystane wszystkie trzy kolory. Przemalowując punkt czerwony, płaszczyzna pozostaje pomalowana dwoma kolorami, natomiast zmieniając kolor któregokolwiek punktu niebieskiego, dostajemy trzykolorową prostą: prosta przechodząca przez punkty czerwony i żółty przechodzi również przez punkty niebieskie.

Ale możemy przecież przemalować więcej punktów, na przykład całą prostą przechodzącą przez punkt czerwony (z wyjątkiem samego punktu czerwonego). W ten sposób nasze kolorowanie dwoma kolorami zostało rozszerzone do kolorowania trzema kolorami, ale musieliśmy w tym celu przemalować więcej niż jeden punkt jednocześnie.

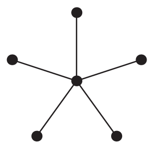
To był pierwszy błąd, ale nie jedyny. Istotna luka polegała na tym, że z obserwacji, że pewne *konkretne* pokolorowanie trzema kolorami nie dało się rozszerzyć przy użyciu czwartego koloru wnioskowaliśmy, że czterech kolorów użyć się w ogóle nie da. Tak rozumować nie można, bo przecież może się okazać, że jakieś inne kolorowanie trzema kolorami da się rozszerzyć używając czwartego koloru! Popatrzmy na zadania, które ilustrują podobną sytuację.

Te zadania dotyczą grafów. Musimy zatem najpierw powiedzieć, co to jest graf. Otóż *graf* jest to figura geometryczna składająca się z punktów płaszczyzny (na rysunku 1 oznaczonych dużymi kropkami) oraz linii łączących niektóre z tych punktów (na rysunku 1 te linie są odcinkami, ale mogą to też być linie krzywe).

Punkty oznaczone kropkami nazywamy *wierzchołkami* grafu; łączące je linie nazywamy *krawędziami*. Krawędzie mogą się na rysunku przecinać (tak jak krawędzie AE i BC na rysunku 1), jednak jeśli punkt przecięcia nie jest zaznaczony kropką, to nie jest on wierzchołkiem grafu.



rys. 1


rys. 2

W dalszym ciągu będziemy zajmować się szczególnym rodzajem grafów: grafami bez trójkątów. *Trójkątem* w grafie nazywamy trzy wierzchołki połączone krawędziami każdy z każdym. Na przykład na rysunku 1 ABC, ACE i CDE są trójkątami, natomiast BCE nie jest trójkątem, gdyż wierzchołki B i E nie są połączone krawędzią.

Powiemy, że graf jest *grafem bez trójkątów*, jeśli nie ma w nim ani jednego trójkąta, tzn. dla dowolnych trzech jego wierzchołków A, B i C co najmniej jedna para AB, AC lub BC nie jest połączona krawędzią. Możemy teraz sformułować pierwsze zadanie.

Zadanie 1.

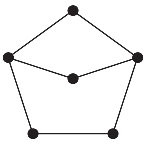
Rozważamy wszystkie grafy bez trójkątów mające 6 wierzchołków. Ile wynosi największa możliwa liczba krawędzi takiego grafu?

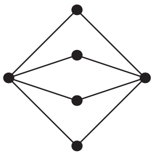
Przeprowadźmy najpierw rozumowanie, jak w przypadku zadania z kolorowaniem płaszczyzny. Na początku

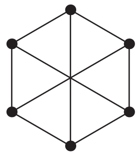
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

wskazujemy graf znajdujący się na rysunku 2. Graf ten nie zawiera trójkąta oraz ma własność, że dodając do niego dowolną krawędź, trójkąt powstanie. Możemy zatem powiedzieć, że graf z rysunku 2 jest *maksymalny*: poprzez dodanie krawędzi nie da się go rozszerzyć do grafu bez trójkątów. Czy wobec tego tą największą możliwą liczbą krawędzi jest 5?

Okazuje się, że nie. Mamy bowiem inny przykład. Graf na rysunku 3 też nie ma trójkątów, a dodanie dowolnej krawędzi utworzy trójkąt. Graf ten jest więc też maksymalny i ma 7 krawędzi. Może wobec tego tą największą możliwą liczbą krawędzi jest 7?


rys. 3


rys. 4


rys. 5

Znów nie! Mamy następny przykład. Graf na rysunku 4 też nie ma trójkątów, jest maksymalny i ma 8 krawędzi.

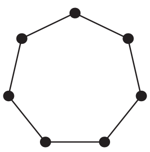
Okazuje się, że to jeszcze nie koniec. Mamy bowiem jeszcze jeden przykład, z rysunku 5 (punkt przecięcia przekątnych sześciokąta na tym rysunku nie jest wierzchołkiem grafu), który ma 9 krawędzi. Czy jest to już największa liczba? Czytelnicy, którzy pamiętają zadanie 3 z zawodów drugiego stopnia II OMG (2006/2007), znają odpowiedź: każdy graf mający 6 wierzchołków i 10 krawędzi zawiera co najmniej jeden trójkąt.

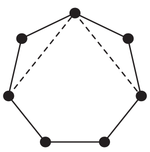
Zadanie 2.

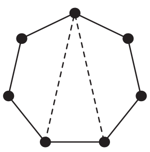
Rozważamy wszystkie grafy bez trójkątów mające 7 wierzchołków. Ile wynosi największa możliwa liczba krawędzi takiego grafu?

Poszukajmy najpierw grafu maksymalnego wśród grafów zawierających *cykl* złożony ze wszystkich siedmiu wierzchołków, czyli wśród grafów zawierających wszystkie krawędzie zaznaczone na rysunku 6.

Zastanówmy się najpierw, ile krawędzi może wychodzić z jednego wierzchołka, aby graf taki nie zawierał żadnego trójkąta. Dwie już widzimy; są to krawędzie cyklu. Żadna z dwóch przekątnych narysowanych linią przerywaną na rysunku 7 nie może być krawędzią grafu, bo powstałby trójkąt. Z kolei spośród dwóch przekątnych narysowanych linią przerywaną na rysunku 8 tylko jedna może być krawędzią grafu.

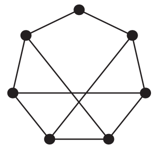

rys. 6

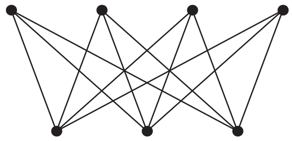

rys. 7


rys. 8

Stąd wynika, że z każdego wierzchołka mogą wychodzić co najwyżej 3 krawędzie. Ile zatem najwięcej krawędzi może mieć taki graf? Policzmy końce krawędzi. Mamy 7 wierzchołków, w każdym schodzą się co najwyżej 3 końce; zatem liczba końców krawędzi jest równa co najwyżej $3 \cdot 7 = 21$. Ponieważ liczba krawędzi jest całkowita, więc taki graf ma co najwyżej 10 krawędzi. I rzeczywiście graf bez trójkątów mający 10 krawędzi istnieje (rys. 9) i jest on maksymalny.

Czy zatem szukaną największą liczbą krawędzi jest w tym przypadku 10? Okazuje się, że nie! Mamy bowiem przykład grafu (rys. 10), który ma 12 krawędzi i także jest maksymalny.


rys. 9


rys. 10

Czy zatem 12 jest tą największą możliwą liczbą krawędzi? Nadszedł czas, by udzielić odpowiedzi na wszystkie nasze pytania i rozwiązać zadanie ogólne.

Zadanie 3.

Rozważamy wszystkie grafy bez trójkątów mające n wierzchołków. Ile wynosi największa możliwa liczba krawędzi takiego grafu?

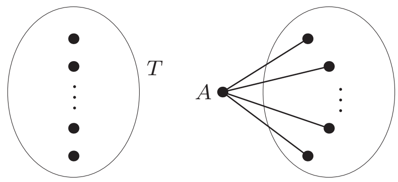
Rozwiązanie zadania 3 zaczniemy od udowodnienia następującego twierdzenia.

Twierdzenie

Graf bez trójkątów mający n wierzchołków ma co najwyżej $\frac{1}{4}n^2$ krawędzi.

Dowód

Niech G będzie dowolnym grafem bez trójkątów mającym n wierzchołków. Niech A będzie takim wierzchołkiem grafu G, z którego wychodzi najwięcej krawędzi, oznaczmy tę liczbę krawędzi przez k (jeśli takich wierzchołków jest kilka, bierzemy którykolwiek z nich). Niech następnie S będzie zbiorem tych wierzchołków, które są połączone krawędzią z wierzchołkiem A i niech T będzie zbiorem wierzchołków różnych od A i niepołączonych krawędzią z A. Oczywiście zbiór S ma k elementów, a zbiór T ma $n-k-1$ elementów.



rys. 11

Żadne dwa wierzchołki zbioru S nie są połączone krawędzią, bowiem wraz z wierzchołkiem A utworzyłyby trójkąt. Wobec tego każda krawędź grafu G ma jeden koniec w wierzchołku A lub w którymś wierzchołku zbioru T. Ponadto z każdego wierzchołka grafu G wychodzi co najwyżej k krawędzi. Zatem łączna liczba krawędzi jest równa co najwyżej

$$k + (n-k-1) \cdot k$$

(jest k krawędzi wychodzących z A i co najwyżej k krawędzi wychodzących z każdego z $n-k-1$ wierzchołków zbioru T). Mamy więc udowodnić nierówność

$$k + (n-k-1) \cdot k \leqslant \frac{n^2}{4},$$

którą po kilku równoważnych przekształceniach sprowadzamy do postaci $0 \leqslant n^2 - 4nk + 4k^2$, czyli $0 \leqslant (n-2k)^2$. Ostatnia nierówność jest prawdziwa, a więc dowodzona nierówność też jest prawdziwa. To kończy dowód twierdzenia.

Z powyższego twierdzenia wynika, że jeśli n jest liczbą parzystą, na przykład $n = 2m$, to liczba krawędzi w grafie bez trójkątów nie przekracza $\frac{n^2}{4} = m^2$. Z kolei graf bez trójkątów mający m^2 krawędzi istnieje. Rozpatrzmy bowiem dwa zbiory wierzchołków S i T mające po m elementów i połączmy krawędzią każdy wierzchołek zbioru S z każdym wierzchołkiem zbioru T. Taki graf ma właśnie m^2 krawędzi i nie ma trójkątów.

Jeśli natomiast n jest liczbą nieparzystą, na przykład $n=2m+1$, to liczba krawędzi w grafie bez trójkątów nie przekracza

$$\frac{n^2}{4} = \frac{(2m+1)^2}{4} = \frac{4m^2+4m+1}{4} = m^2+m+\frac{1}{4}.$$

Ale liczba krawędzi jest liczbą całkowitą, więc jest równa co najwyżej $m^2+m=m(m+1)$. Graf bez trójkątów mający tyle krawędzi także istnieje: wystarczy zmodyfikować powyższy przykład przyjmując, że zbiór T ma $m+1$ elementów, a zbiór S ma m elementów.

Podsumowując: największa liczba krawędzi w grafie bez trójkątów jest równa m^2, jeśli $n=2m$ oraz równa $m(m+1)$, jeśli $n=2m+1$. To kończy rozwiązanie zadania 3.

Zauważmy, że rozwiązanie zadania 3 składało się z dwóch niezależnych części. Najpierw udowodniliśmy twierdzenie pokazujące, ile *co najwyżej* krawędzi ma graf bez trójkątów, a następnie wskazaliśmy przykłady grafów mające taką właśnie największą możliwą liczbę krawędzi. W podobny sposób należało rozwiązać zadanie olimpijskie. W rozwiązaniu konieczny jest przykład kolorowania płaszczyzny trzema kolorami i konieczny jest dowód, że czterema kolorami w taki sposób płaszczyzny pokolorować nie można. Wskazanie przykładu „maksymalnego” nie jest dowodem — tak jak żaden przykład grafu maksymalnego nie był dowoden w naszych zadaniach o grafach bez trójkątów.

Zobaczmy jeszcze jedno zadanie podobnego typu. Tym razem będziemy kolorować ciągi kółek dwoma kolorami: białym i czarnym. Kolorowanie nazwiemy *prawidłowym*, jeśli nie istnieją trzy kółka tego samego koloru w takich samych odstępach od siebie. Popatrzmy na przykłady.

○ ○ ● ● ○ ● ● ● ○ ●

rys. 12

Na rysunku 12 widzimy kolorowanie nieprawidłowe, bowiem istnieją w nim ciągi kółek tego samego koloru w jednakowych odstępach:

1) trzy białe kółka na miejscach 1, 5 i 9,
2) trzy czarne kółka na miejscach 6, 7 i 8,
3) trzy czarne kółka na miejscach 4, 7 i 10.

Z kolei na rysunkach 13 i 14 znajdują się kolorowania prawidłowe.

○ ● ○ ● ● ○ ●

rys. 13

○ ● ○ ○ ● ●

rys. 14

Zauważmy przy tym, że kolorowania z rysunku 14 nie można przedłużyć do kolorowania prawidłowego, dorysowując z jego prawej strony kółko dowolnego koloru: dorysowanie kółka białego da trójkę białą na miejscach 1, 4 i 7; dorysowanie kółka czarnego da trójkę czarną na miejscach 5, 6, i 7. Takie kolorowanie prawidłowe, którego nie można rozszerzyć do kolorowania prawidłowego dorysowując na jego końcu kółko białe lub czarne, nazwiemy kolorowaniem *maksymalnym.*

Zadanie 4.

Ile wynosi największa możliwa liczba kółek w kolorowaniu prawidłowym dwoma kolorami?

Wiemy już, że wskazanie kolorowania maksymalnego nie stanowi rozwiązania zadania. Mamy bowiem przykład kolorowania maksymalnego długości 6 (rys. 14) oraz kolorowania prawidłowego długości większej od 6 (rys. 13). Zauważmy też, że kolorowanie z rysunku 13 nie jest maksymalne: można je przedłużyć do kolorowania maksymalnego dorysowując kółko białe

○ ● ○ ● ● ○ ● ○

rys. 15

i otrzymując w ten sposób nowe kolorowanie maksymalne o długości 8. Czy istnieje zatem kolorowanie prawidłowe o długości większej niż 8? Okazuje się, że nie. Można na przykład rozważyć wszystkie możliwe przypadki i wypisać wszystkie możliwe prawidłowe kolorowania maksymalne. Ponadto istnieje tylko 12 prawidłowych kolorowań maksymalnych zaczynających się od kółka białego i tyle samo zaczynających się od kółka czarnego (powstających z poprzednich przez zamianę kolorów). Polecam Czytelnikom sprawdzenie tego.

Trudniej natomiast jest odpowiedzieć na pytanie, ile wynosi największa możliwa liczba kółek w kolorowaniu prawidłowym trzema kolorami. Okazuje się, że ta największa możliwa liczba kółek to 26, jednak uzasadnienie tego stwierdzenia wykorzystuje obliczenia komputerowe.

Wiadomo także, że najdłuższe prawidłowe kolorowanie za pomocą czterech kolorów składa się z 75 kółek. Nie znamy natomiast odpowiedzi na pytania, jakie są najdłuższe kolorowania prawidłowe pięcioma i sześcioma kolorami (dla 5 kolorów wiemy, że najdłuższe kolorowanie prawidłowe ma długość co najmniej 170, a dla sześciu kolorów co najmniej 223). Wiadomo także, że długość każdego prawidłowego kolorowania dla r kolorów nie przekracza

$$2^{2^{r^{2^{2^{12}}}}}.$$

Jak widać odpowiedzi na niektóre pytania o maksymalność są niezwykle trudne do uzyskania. W pewnych sytuacjach umiemy udowodnić twierdzenie ogólne i wskazać odpowiedni przykład maksymalny, w innych próbujemy przeszukać wszystkie możliwe przypadki, by znaleźć w ten sposób najdłuższy przykład maksymalny.

Wojciech Guzicki

Polacy znów na podium

W dniach 8–12 listopada 2012 r. w Estonii odbyły się 23. Zawody Matematyczne Państw Bałtyckich (*Baltic Way*), w których udział wzięło 11 reprezentacji: z Danii, Estonii, Finlandii, Islandii, Litwy, Łotwy, Niemiec, Norwegii, Polski, Szwecji oraz Sankt Petersburga. Każda reprezentacja liczyła 5 uczniów.

Polska drużyna, wybrana w kwietniu 2012 r. na podstawie wyników LXIII Olimpiady Matematycznej, miała następujący skład:

- Grzegorz Adamski – I LO w Szamotułach;
- Anna Olech – XIV LO w Warszawie;
- Kajetan Ożarowski – XIV LO we Wrocławiu;

- Krzysztof Pszeniczny – LO Sióstr Prezentek w Rzeszowie;
- Michał Ziobro – V LO w Krakowie.

Zawody odbyły się dnia 10 listopada i miały charakter zespołowy. Każda drużyna pracowała wspólnie w jednej sali, mając 4,5 godziny na rozwiązanie 20 zadań. Za każde zadanie można było otrzymać od 0 do 5 punktów. Pierwsze miejsce zajęli uczniowie z Sankt Petersburga z wynikiem 88 punktów. Drużyna polska zdobyła 75 punktów i zajęła drugie miejsce, a trzecia była ekipa z Litwy z wynikiem 63 punktów. Warto tu przypomnieć, że pierwsze miejsca Polski w zawodach *Baltic Way* w latach 2010 i 2011 zostały osiągnięte przy nieobecności drużyny petersburskiej. Tym razem Rosjanie przyjechali i zabrali puchar przechodni do siebie. Liczymy więc, że przyjadą też na przyszłoroczne zawody...

Wśród zadań, z którymi zmagali się uczniowie, znalazły się następujące dwa, doskonale ilustrujące metody opisane w artykule *Kwadraty, liczby pierwsze i reszta* (*Kwadrat* nr 7, grudzień 2012).

Zadanie 1. (*Baltic Way* 2012, zadanie nr 18)

Wyznaczyć wszystkie trójki (a,b,c) liczb całkowitych spełniających równanie
$$a^2+b^2+c^2=20122012.$$

Rozwiązanie

Prawa strona rozważanego równania jest podzielna przez 4. Zastanówmy się więc nad resztą, jaką mogą dawać składniki lewej strony przy dzieleniu przez 4. Jak wiemy, kwadrat liczby całkowitej daje przy dzieleniu przez 4 resztę 0 lub 1. Wynika stąd, że suma trzech takich kwadratów może być podzielna przez 4 jedynie wtedy, gdy wszystkie te kwadraty są podzielne przez 4. A to oznacza, że jeżeli trójka (a,b,c) jest rozwiązaniem danego równania, to liczby a, b i c są parzyste.

Możemy zatem napisać $a=2x$, $b=2y$ i $c=2z$, gdzie liczby x, y i z są całkowite. Po podstawieniu tych zależności do naszego równania i obustronnym podzieleniu przez 4, otrzymujemy równanie
$$(*)\qquad x^2+y^2+z^2=5030503.$$

Przyjrzyjmy się teraz resztom, jakie obie strony równania $(*)$ dają przy dzieleniu przez 8. Bez trudu obliczamy, że prawa strona daje resztę 7. Natomiast kwadrat liczby całkowitej daje resztę 0, 1 lub 4. Stąd wnioskujemy, że suma trzech kwadratów nie może dawać reszty 7. W konsekwencji równanie $(*)$ — a w ślad za tym także równanie dane w treści zadania — nie ma żadnych rozwiązań.

Zadanie 2. (*Baltic Way* 2012, zadanie nr 19)

Wykazać, że liczba $n^n+(n+1)^{n+1}$ jest złożona dla nieskończenie wielu liczb naturalnych n.

Rozwiązanie

Udowodnimy, że dla nieskończenie wielu wartości n liczba $n^n+(n+1)^{n+1}$ jest podzielna przez 3, a więc złożona (gdyż dla każdego $n\geqslant 1$ jest ona większa od 3).

W tym celu zastanówmy się nad resztą, jaką w zależności od k daje liczba k^k przy dzieleniu przez 3. Jeżeli liczba k jest podzielna przez 3, to liczba k^k również. A jeżeli liczba k nie jest podzielna przez 3? Wtedy istotna staje się parzystość liczby k. Jeżeli liczba k jest parzysta, to wykładnik potęgi k^k jest parzysty, czyli liczba k^k jest kwadratem, i to kwadratem niepodzielnym przez 3. Zatem $k^k\equiv 1 \pmod 3$. Jeżeli natomiast liczba k jest nieparzysta, to podobnie stwierdzamy, że liczba k^{k-1} jest kwadratem niepodzielnym przez 3, skąd otrzymujemy
$$k^k=k^{k-1}\cdot k\equiv 1\cdot k=k \pmod 3.$$

Podsumowując:
$$\begin{aligned}
k^k&\equiv 0 \pmod 3, && \text{jeśli } k\equiv 0 \pmod 3,\\
k^k&\equiv 1 \pmod 3, && \text{jeśli } k\not\equiv 0 \pmod 3 \text{ i } k\equiv 0 \pmod 2,\\
k^k&\equiv k \pmod 3, && \text{jeśli } k\not\equiv 0 \pmod 3 \text{ i } k\not\equiv 0 \pmod 2.
\end{aligned}$$

Uzyskane wyniki najprościej przedstawić w zależności od reszty z dzielenia liczby k przez 6:

$k \pmod 6$	0	1	2	3	4	5
$k \pmod 2$	0	1	0	1	0	1
$k \pmod 3$	0	1	2	0	1	2
$k^k \pmod 3$	0	1	1	0	1	2

Stąd prosty wniosek: dla $n\equiv 4 \pmod 6$ prawdziwe są zależności $n^n\equiv 1 \pmod 3$ oraz $(n+1)^{n+1}\equiv 2 \pmod 3$, czyli suma $n^n+(n+1)^{n+1}$ jest podzielna przez 3. Zatem wszystkie liczby n dające resztę 4 z dzielenia przez 6 spełniają warunki zadania, co kończy rozwiązanie.

Wypada jeszcze dodać słowo o... kurczakach. Co mają wspólnego kurczaki z zawodami *Baltic Way* 2012 ? Otóż uroczystość zakończenia zawodów wraz z bankietem pożegnalnym została zorganizowana w centrum nauki AHHAA w Tartu. Można tam było obserwować różne eksperymenty fizyczne (i nie tylko), jednak zamiast wirów wodnych czy labiryntu z luster największym zainteresowaniem — zwłaszcza wśród uczniów mieszkających od urodzenia w dużych miastach — cieszył się szklany inkubator przeznaczony do wylęgu jaj kurzych. Można go było obserwować z sali bankietowej, a stan umieszczonych w nim jaj zmienił się nieco podczas wieczoru...

Więcej informacji na temat historii zawodów *Baltic Way* można znaleźć w *Kwadracie* nr 4 (maj 2012).

Kamil Duszenko

Wskazówki do zadań z poprzedniego numeru

Czy istnieje taki wielościan...?

3. Zaznacz na rysunku punkty wspólne płaszczyzn zawierających górną i dolną ścianę i sprawdź, czy leżą one na jednej prostej. Szukaną bryłę można uzyskać, przecinając odpowiednio jeden ze skonstruowanych w artykule wielościanów.

4. Przetnij odpowiednio graniastosłup sześciokątny.

5. Przetnij odpowiednio graniastosłup o podstawie 99-kąta.

Kwadraty, liczby pierwsze i reszta

4. Ile wynosi łączna liczba ścian, wierzchołków i krawędzi w graniastosłupie o podstawie n-kąta? A w ostrosłupie?

5. W przypadku (a) porównaj reszty z dzielenia obu stron danego równania przez 3, w przypadku (c) przez 5, natomiast w przypadku (b) przez 4 i przez 8.

6. Rozważ możliwe reszty z dzielenia p przez 5.

7. Rozważ osobno przypadki, gdy x jest liczbą parzystą i nieparzystą (popatrz na resztę z dzielenia przez 5). Następnie rozważ reszty z dzielenia przez 3 i przez 8.

8. Popatrz na reszty z dzielenia liczby $1+3^n+5^n$ kolejno przez 3, 5 i 7. *Uwaga.* Dla $n=12$ liczba $1+3^n+5^n$ jest pierwsza!

Redaguje zespół w składzie: Urszula Pastwa, Waldemar Pompe (przewodniczący KG OMG), Łukasz Rajkowski, Tomasz Szymczyk (ogólnopolski koordynator OMG). Recenzent: dr Joanna Jaszuńska. Adres do korespondencji: `kwadrat.omg@gmail.com`