Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Liga zadaniowa 2012/2013

Seria IX (marzec 2013) — rozwiązania zadań

Matematyczna Olimpiada Gimnazjalistów www.omg.edu.pl

---

41. *Dana jest dodatnia liczba całkowita n oraz takie liczby całkowite a, b, że liczba $a-b$ jest podzielna przez n. Udowodnij, że liczba a^n-b^n jest podzielna przez n^2.*

Rozwiązanie

Niech a, b będą danymi liczbami całkowitymi takimi, że różnica $a-b$ jest podzielna przez n. Wówczas liczba $k=(a-b)/n$ jest całkowita i zachodzi równość $a=b+k\cdot n$.

Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona, otrzymujemy

$$a^n=(b+k\cdot n)^n=\binom{n}{0}\cdot b^n+\binom{n}{1}\cdot b^{n-1}\cdot k\cdot n+\binom{n}{2}\cdot b^{n-2}\cdot k^2\cdot n^2+\binom{n}{3}\cdot b^{n-3}\cdot k^3\cdot n^3+$$

$$+\ldots+\binom{n}{n-2}\cdot b^2\cdot k^{n-2}\cdot n^{n-2}+\binom{n}{n-1}\cdot b\cdot k^{n-1}\cdot n^{n-1}+\binom{n}{n}\cdot k^n\cdot n^n\equiv$$

$$\equiv\binom{n}{0}\cdot b^n+\binom{n}{1}\cdot b^{n-1}\cdot k\cdot n=b^n+n\cdot b^{n-1}\cdot k\cdot n\equiv b^n\ \left(\bmod\ n^2\right),$$

co kończy rozwiązanie zadania.

---

42. *Wyznacz wszystkie takie dodatnie liczby całkowite n, że równanie*

$$\frac{x^2}{x+1}+\frac{y^2}{y+1}+\frac{z^2}{z+1}=n \tag{1}$$

ma rozwiązanie w dodatnich liczbach całkowitych x, y, z.

Rozwiązanie

Zauważmy, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej t zachodzą równości

$$\frac{t^2}{t+1}=\frac{(t-1)(t+1)+1}{t+1}=t-1+\frac{1}{t+1}.$$

Stąd wniosek, że dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych x, y, z, lewa strona równania (1) jest całkowita wtedy i tylko wtedy, gdy liczba

$$k=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}$$

jest całkowita.

Jednakże dla $t\geqslant 1$ zachodzą nierówności

$$0<\frac{1}{t+1}\leqslant\frac{1}{2},$$

które prowadzą do wniosku, że

$$0<k\leqslant\frac{3}{2}.$$

W takim razie jedyną możliwą całkowitą wartością liczby k jest 1.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Wystarczy więc rozwiązać w dodatnich liczbach całkowitych równanie

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}=1. \tag{2}$$

Przyjmijmy bez straty ogólności, że $x \leqslant y \leqslant z$. Wówczas

$$1=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1} \leqslant 3\cdot\frac{1}{x+1}, \tag{3}$$

skąd $x+1 \leqslant 3$, czyli $x \leqslant 2$.

Jeżeli $x=2$, to prawa strona nierówności (3) jest równa 1, zatem nierówność ta staje się równością, co prowadzi do $x=y=z=2$.

Jeśli natomiast $x=1$, to równanie (2) przyjmuje postać

$$\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}=\frac{1}{2}.$$

Podobnie jak poprzednio, dostajemy

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1} \leqslant 2\cdot\frac{1}{y+1},$$

skąd $y \leqslant 3$. Pozostaje zauważyć, że jeśli $y=3$, to $z=3$, a jeżeli $y=2$, to $z=5$. Z kolei $y=1$ prowadzi do równania

$$\frac{1}{z+1}=0,$$

które nie ma rozwiązań.

Ostatecznie, przy założeniu $x \leqslant y \leqslant z$, otrzymujemy trzy rozwiązania (x,y,z) równania (2):

$$(2,2,2), \quad (1,3,3), \quad (1,2,5).$$

Łatwo obliczyć, że odpowiadające im wartości liczby n są równe 4, 5, 6.

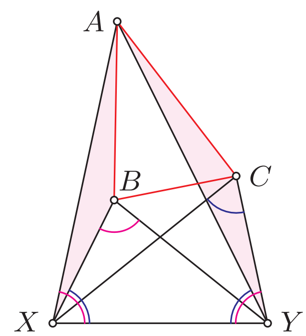
Odpowiedź
Warunki zadania spełniają liczby 4, 5, 6.

---

43. *Dane są takie punkty A, B, C, X, Y, że punkty A, B, C leżą po tej samej stronie prostej XY oraz zachodzą następujące równości kątów:*

$$\sphericalangle AXY = \sphericalangle YBX = \sphericalangle XYC,$$
$$\sphericalangle XYA = \sphericalangle BXY = \sphericalangle YCX.$$

Wykaż, że trójkąt ABC jest podobny do trójkąta AXY.



rys. 1

Rozwiązanie
Rozwiążemy zadanie w sytuacji przedstawionej na rysunku 1, gdy

$$\sphericalangle YAX \leqslant \sphericalangle XYA \leqslant \sphericalangle AXY,$$

pozostałe przypadki rozwiązuje się podobnie.

Z równości kątów danych w zadaniu otrzymujemy podobieństwo trójkątów AXY, YBX i XYC, a stąd

$$\frac{AX}{AY}=\frac{YB}{YX}=\frac{BX}{YX}\cdot\frac{YB}{BX}=\frac{BX}{YX}\cdot\frac{XY}{YC}=\frac{BX}{YC}.$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Mamy również

$$\sphericalangle AXB = \sphericalangle AXY - \sphericalangle BXY = \sphericalangle XYC - \sphericalangle XYA = \sphericalangle AYC.$$

W takim razie trójkąty XAB i YAC są podobne, w szczególności $\sphericalangle XAB = \sphericalangle YAC$. Wobec tego uzyskujemy równości

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle XAC - \sphericalangle XAB = \sphericalangle XAC - \sphericalangle YAC = \sphericalangle XAY.$$

Podobnie otrzymujemy podobieństwo trójkątów XBC i YBA oraz równość

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle XBY = \sphericalangle AXY.$$

Wykazaliśmy również, że $\sphericalangle BAC = \sphericalangle XAY$, więc trójkąty ABC i AXY są podobne.

---

44. *Dany jest czworościan $ABCD$. Udowodnij, że krawędzie AB i CD są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki równoległobok $CDPQ$, że $PA = PB = PD$ oraz $QA = QB = QC$.*

Rozwiązanie

Załóżmy, że istnieje równoległobok opisany w treści zadania. Skoro $PA = PB$ oraz $QA = QB$, to punkty P i Q leżą na płaszczyźnie symetralnej odcinka AB. W takim razie odcinki PQ i AB są prostopadłe. Odcinek CD jest równoległy do PQ, więc również jest prostopadły do AB. To kończy dowód jednej implikacji.

Załóżmy teraz, że krawędzie AB i CD są prostopadłe. Rozpatrzmy prostą k przechodzącą przez środek okręgu opisanego na trójkącie ABD i prostopadłą do płaszczyzny ABD — jest to zbiór punktów X spełniających warunek $XA = XB = XD$. Podobnie niech prosta l przechodzi przez środek okręgu opisanego na trójkącie ABC i będzie prostopadła do płaszczyzny ABC — jest to zbiór punktów Y spełniających warunek $YA = YB = YC$. Obie te proste leżą w płaszczyźnie symetralnej odcinka AB i nie są równoległe (ponieważ płaszczyzny ABD i ABC nie są równoległe), więc przecinają się w pewnym punkcie S.

Odcinek CD jest prostopadły do AB, zatem jest równoległy do płaszczyzny symetralnej odcinka AB. Poprowadźmy w tej płaszczyźnie prostą m, równoległą do CD i mającą z prostymi k i l różne punkty wspólne, odpowiednio P' i Q'. W szczególnym przypadku, gdy odcinek CD jest równoległy do prostej k, przyjmujemy $m = k$, wówczas $Q' = S$, a P' jest dowolnym punktem na k różnym od S (jeśli odcinek CD jest równoległy do prostej l, postępujemy analogicznie).

Niech punkty P i Q będą obrazami odpowiednio punktów P' i Q' w jednokładności o środku S i skali s, gdzie $s = -\frac{CD}{P'Q'}$, jeśli wektory $\overrightarrow{CD}$ i $\overrightarrow{P'Q'}$ są jednakowo skierowane, lub $s = \frac{CD}{P'Q'}$ w przeciwnym przypadku.

Tak otrzymane punkty P i Q leżą odpowiednio na prostych k i l (a więc $PA = PB = PD$ oraz $QA = QB = QC$). Sprawdzimy, że spełniają również pozostałe warunki zadania. Odcinek PQ jest równoległy do $P'Q'$, więc również do CD (w szczególności odcinki CD i PQ leżą w jednej płaszczyźnie). Znak skali jednokładności został dobrany tak, by wektory $\overrightarrow{CD}$ i $\overrightarrow{QP}$ były jednakowo skierowane. Mamy również

$$PQ = P'Q' \cdot \frac{CD}{P'Q'} = CD.$$

W takim razie czworokąt $CDPQ$ jest równoległobokiem, co daje tezę.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

45. *Ciocia ma 8 woreczków z cukierkami. W każdym woreczku znajduje się nie mniej niż 79 i nie więcej niż 97 cukierków. Udowodnij, że ciocia może obdarować Stasia i Zosię tak, aby każde z dzieci dostało woreczki zawierające łącznie taką samą liczbę cukierków.*

Rozwiązanie

Rozważmy wszystkie 3-elementowe podzbiory 8-elementowego zbioru woreczków. Takich podzbiorów jest

$$\binom{8}{3} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1} = 56.$$

Woreczki wchodzące w skład każdego z tych podzbiorów zawierają łącznie co najmniej $3\cdot 79 = 237$ cukierków i nie więcej niż $3\cdot 97 = 291$ cukierków. Ponieważ liczb całkowitych z zakresu od 237 do 291 jest $291-237+1=55$, a 3-elementowych podzbiorów zbioru woreczków jest 56, istnieją dwa 3-elementowe podzbiory zawierające taką samą liczbę cukierków. W przypadku, gdy co najmniej jeden woreczek należy jednocześnie do obu tych podzbiorów, usuwamy z nich woreczki stanowiące ich część wspólną. W ten sposób otrzymujemy dwa niepuste rozłączne zbiory woreczków zawierające łącznie tyle samo cukierków.

Urszula Pastwa
Kierownik naukowy obozu