Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Liga zadaniowa 2012/2013

Seria I (lipiec 2012)

Matematyczna Olimpiada Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

1. W sześcianie o krawędzi 1 umieszczono 344 punkty. Udowodnij, że odległość pewnych dwóch z tych punktów jest mniejsza od 1/4.

2. Dane są takie dodatnie liczby całkowite a, b, c, d, n, że liczby $a+b^2$, $b+c^2$, $c+d^2$, $d+a^2$ są podzielne przez n. Udowodnij, że liczba

$$ab^8+b^8c^{64}-c^{64}d^{512}-d^{512}a$$

jest podzielna przez n^2.

3. Ile co najwyżej $(3,1)$-skoczków można ustawić na szachownicy o wymiarach 100×100 w taki sposób, aby żadne dwa sobie nie zagrażały?

Uwaga: Dwa $(3,1)$-skoczki zagrażają sobie, gdy stoją na przeciwległych narożnych polach pewnego prostokąta o wymiarach 2×4.

4. Podstawą pewnego ostrosłupa jest pięciokąt foremny. Każda ściana boczna tego ostrosłupa jest trójkątem równoramiennym. Czy wynika stąd, że krawędzie boczne tego ostrosłupa są równej długości?

5. Punkty K i L należą odpowiednio do boków BC i CD czworokąta wypukłego $ABCD$. Odcinki BL i DK przecinają się w punkcie P. W każdy z czworokątów $ABPD$ i $CKPL$ można wpisać okrąg. Wykaż, że w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg.

Urszula Swianiewicz
Kierownik naukowy obozu

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego