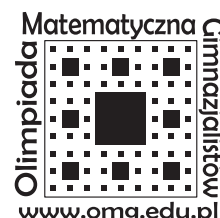


Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Liga zadaniowa 2012/2013

Seria III (wrzesień 2012) — rozwiązania zadań



11. *Lech, Czech i Rus konkurują o rękę królowy. Król usypał na środku komnaty stos złożony z 2012 dukatów i nakazał konkurentom kolejno dzielić stosy dukatów na mniejsze, jednak przesądny król zabronił dzielić stosów złożonych z 13 dukatów. W jednym posunięciu konkurent wybiera więc dowolny stos zawierający co najmniej 2 dukaty, ale niezawierający dokładnie 13 dukatów i dzieli go dowolnie na dwa niepuste stosy. Swoje posunięcia konkurenci wykonują cyklicznie: Lech, Czech, Rus, Lech, Czech, Rus,...*

Król obiecał rękę królowy temu, kto jako ostatni dokona podziału stosu dukatów.

Czy któryś z konkurentów może zapewnić sobie rękę królowy niezależnie od posunięć pozostałych konkurentów? Jeżeli tak, to który i jak powinien on postępować w trakcie rozgrywki?

Rozwiązanie

W końcowej pozycji, kiedy nie można już dokonać podziału żadnego stosu zgodnie z narzuconymi przez króla regułami, każdy stos zawiera jednego dukata lub 13 dukatów. Niech n będzie liczbą stosów zawierających 13 dukatów. Wówczas pozostałych $2012 - 13n$ dukatów leży na stosach złożonych z jednej monety. Zatem łączna liczba stosów jest równa

$$n + (2012 - 13n) = 2012 - 12n.$$

Ponieważ każdy ruch zwiększa liczbę stosów o 1, a na początku rozgrywki był jeden stos, liczba posunięć wykonanych przez konkurentów jest równa

$$2012 - 12n - 1 = 2011 - 12n \equiv 1 \pmod{3}.$$

Stąd wynika, że ostatni ruch wykonał ten sam konkurent, który rozpoczął grę, czyli Lech.

Odpowiedź

Ręka królowy przypadnie Lechowi niezależnie od przebiegu rozgrywki.

12. *Wyznacz wszystkie czwórki kolejnych liczb całkowitych dodatnich, dla których pierwiastek kwadratowy iloczynu ma na pierwszym miejscu po przecinku cyfrę parzystą.*

Rozwiązanie

Niech n będzie najmniejszą z czwórki liczb. Zauważmy, że wówczas

$$n(n+3) = n^2 + 3n = (n^2 + 3n + 1) - 1$$

oraz

$$(n+1)(n+2) = n^2 + 3n + 2 = (n^2 + 3n + 1) + 1.$$

Stąd wynika, że

$$n(n+1)(n+2)(n+3) = (n^2 + 3n + 1)^2 - 1.$$

Dla $n = 1$ iloczyn czterech kolejnych liczb jest równy 24. Mamy wówczas

$$4,8 = \sqrt{23,04} < \sqrt{24} < \sqrt{24,01} = 4,9,$$

skąd wynika, że pierwiastek kwadratowy tego iloczynu ma po przecinku cyfrę 8.

Niech $N = n^2 + 3n + 1$. Wówczas dla $n \geq 2$ mamy $N \geq 11$. W takim razie zachodzą następujące nierówności:

$$N - \frac{1}{10} = \sqrt{N^2 - \frac{N}{5} + \frac{1}{100}} \leq \sqrt{N^2 - \frac{11}{5} + \frac{1}{100}} = \sqrt{N^2 - 2,19} < \sqrt{N^2 - 1} < \sqrt{N^2} = N.$$

Skoro $n(n+1)(n+2)(n+3) = N^2 - 1$, to pierwiastek kwadratowy tego iloczynu ma po przecinku cyfrę 9.

Odpowiedź

Jedyną czwórką liczb spełniającą warunki zadania jest czwórka $(1, 2, 3, 4)$.

13. Dana jest liczba pierwsza p oraz zbiór złożony z $p-1$ różnych liczb całkowitych dodatnich niepodzielnych przez p .

Udowodnij, że z tego zbioru można wybrać niepusty podzbiór liczb o iloczynie dającym przy dzieleniu przez p resztę 1.

Rozwiązanie

Niech $n_1, n_2, n_3, \dots, n_{p-1}$ będą danymi liczbami. Rozważmy p iloczynów

$$P_k = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_k$$

dla $k = 0, 1, 2, 3, \dots, p-1$, przy czym przyjmujemy, że $P_0 = 1$.

Ponieważ liczby $n_1, n_2, n_3, \dots, n_{p-1}$ są niepodzielne przez liczbę pierwszą p , iloczyny P_i również są niepodzielne przez p . Każdy z tych iloczynów przy dzieleniu przez p daje więc jedną z $p-1$ niezerowych reszt, a zatem na mocy zasady szufladkowej Dirichleta, pewne dwa iloczyny dają przy dzieleniu przez p taką samą resztę. Niech P_i oraz P_j , gdzie $i < j$, będą tymi iloczynami. Wówczas

$$P_i \equiv P_j \pmod{p},$$

czyli

$$P_i \equiv P_i \cdot n_{i+1} \cdot n_{i+2} \cdot n_{i+3} \cdot \dots \cdot n_j.$$

Zatem iloczyn

$$P_i \cdot (n_{i+1} \cdot n_{i+2} \cdot n_{i+3} \cdot \dots \cdot n_j - 1)$$

jest podzielny przez p . Skoro pierwszy czynnik powyższego iloczynu nie jest podzielny przez p , to przez p dzieli się drugi czynnik, a to oznacza, że iloczyn $n_{i+1} \cdot n_{i+2} \cdot n_{i+3} \cdot \dots \cdot n_j$ przy dzieleniu przez p daje resztę 1. To kończy rozwiązanie zadania.

14. Kule ω_1, ω_2 i ω_3 o promieniach odpowiednio 3, 4 i 12 są parami styczne zewnętrznie. Pewna płaszczyzna jest styczna do kuli ω_1 w punkcie A , do kuli ω_2 – w punkcie B i do kuli ω_3 – w punkcie C . Oblicz miary kątów trójkąta ABC .

Rozwiązanie

Niech O_1, O_2 i O_3 będą odpowiednio środkami kul ω_1, ω_2 i ω_3 .

Odcinki O_1A oraz O_2B są prostopadłe do płaszczyzny stycznej, zatem w szczególności odcinki te są równoległe. W takim razie czworokąt O_1ABO_2 jest trapezem prostokątnym, w którym $O_1A = 3, O_2B = 4, O_1O_2 = O_1A + O_2B = 7$.

Niech O_1H będzie wysokością tego trapezu opuszczoną na podstawę O_2B . Wówczas z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy

$$AB^2 = O_1H^2 = O_1O_2^2 - O_2H^2 = (O_2B + O_1A)^2 - (O_2B - O_1A)^2 = 4 \cdot O_2B \cdot O_1A = 48.$$



W analogiczny sposób otrzymujemy $BC^2 = 4 \cdot O_2B \cdot O_3C = 192$ oraz $CA^2 = 4 \cdot O_3C \cdot O_1A = 144$. W takim razie mamy $AB^2 + CA^2 = BC^2$, więc trójkąt ABC jest trójkątem prostokątnym o kącie prostym przy wierzchołku A . Mamy również $BC^2 = 4AB^2$, więc $BC = 2AB$. W takim razie trójkąt ABC stanowi połowę trójkąta równobocznego i wobec tego jego kąty wynoszą 30° , 60° i 90° .

Odpowiedź

Miary kątów trójkąta ABC wynoszą 30° , 60° i 90° .

15. Okrąg o , wpisany w trójkąt ABC , jest styczny do boków AC i AB odpowiednio w punktach F i S . Punkt O jest środkiem okręgu o , a punkt E jest symetryczny do punktu S względem punktu A . Wykaż, że proste EF i AO są równoległe.

Rozwiązanie

Ponieważ zachodzą równości $AF = AS = AE$, to odcinek ES jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie ESF . W takim razie $\sphericalangle SEF = \frac{1}{2} \sphericalangle SAF$.

Punkt O jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC , więc leży on na dwusiecznej kąta przy wierzchołku A trójkąta ABC . Wobec tego $\sphericalangle SAO = \frac{1}{2} \sphericalangle SAF = \sphericalangle SEF$. Stąd wniosek, że proste EF i AO są równoległe.



Urszula Pastwa
Kierownik naukowy obozu



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



OŚRODEK
ROZWOJU
EDUKACJI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

