Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Liga zadaniowa 2012/2013

Seria IV (październik 2012) — rozwiązania zadań

Matematyczna Olimpiada Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

16. *Dla danej liczby naturalnej n rozważamy wszystkie sumy postaci*

$$1\cdot a_1\cdot b_1+2\cdot a_2\cdot b_2+3\cdot a_3\cdot b_3+4\cdot a_4\cdot b_4+\ldots+n\cdot a_n\cdot b_n,$$

gdzie $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ oraz $(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$ są permutacjami ciągu $(1, 2, 3, \ldots, n)$.

Udowodnij, że największa z tych sum jest kwadratem liczby naturalnej.

Rozwiązanie

Niech $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ oraz $(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$ będą permutacjami ciągu $(1, 2, 3, \ldots, n)$, dla których dana w zadaniu suma jest największa.

Rozważmy następujące przypadki:

1° Istnieje takie i, że $1\leqslant i<n$ oraz

$$a_i>a_{i+1}\,,\qquad b_i>b_{i+1}\,.$$

Wówczas

$$i\cdot a_i\cdot b_i+(i+1)\cdot a_{i+1}\cdot b_{i+1}=i\cdot(a_i\cdot b_i+a_{i+1}\cdot b_{i+1})+a_{i+1}\cdot b_{i+1}<$$
$$<i\cdot(a_i\cdot b_i+a_{i+1}\cdot b_{i+1})+a_i\cdot b_i=i\cdot a_{i+1}\cdot b_{i+1}+(i+1)\cdot a_i\cdot b_i\,,$$

co oznacza, że zamiana a_i z a_{i+1} oraz b_i z b_{i+1} prowadzi do sumy o większej wartości. Zatem permutacja realizująca największą wartość sumy nie może wystąpić w tym przypadku.

2° Istnieje takie i, że $1\leqslant i<n$ oraz

$$a_i<a_{i+1}\,,\qquad b_i>b_{i+1}\,.$$

Wówczas

$$i\cdot a_i\cdot b_i+(i+1)\cdot a_{i+1}\cdot b_{i+1}=i\cdot a_i\cdot(b_i+b_{i+1})+((i+1)\cdot a_{i+1}-i\cdot a_i)\cdot b_{i+1}<$$
$$<i\cdot a_i\cdot(b_i+b_{i+1})+((i+1)\cdot a_{i+1}-i\cdot a_i)\cdot b_i=i\cdot a_i\cdot b_{i+1}+(i+1)\cdot a_{i+1}\cdot b_i\,,$$

skąd wniosek, że zamiana b_i z b_{i+1} prowadzi do sumy o większej wartości. Tak więc permutacja realizująca największą wartość sumy nie może wystąpić w tym przypadku.

3° Istnieje takie i, że $1\leqslant i<n$ oraz

$$a_i>a_{i+1}\,,\qquad b_i<b_{i+1}\,.$$

Ten przypadek jest analogiczny do przypadku 2° — wystarczy zamienić rolami a oraz b.

Największa suma jest więc otrzymywana w ostatnim przypadku:

4° Nie zachodzi żaden z powyższych przypadków, czyli dla każdego i spełniającego nierówność $1\leqslant i<n$ zachodzi

$$a_i<a_{i+1}\qquad\text{oraz}\qquad b_i<b_{i+1}.$$

Oznacza to, że $a_j=j$ oraz $b_j=j$ dla $j=1,2,3,\ldots,n$.

Zatem największa możliwa wartość danej w zadaniu sumy jest równa

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+n^3.$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga

Powyższe rozumowanie jest w istocie dowodem szczególnego przypadku twierdzenia o ciągach jednakowo monotonicznych. Można więc zastąpić je powołaniem się na to twierdzenie.

Wykażemy, że powyższa suma jest równa

$$\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2.$$

Liczba w nawiasie jest całkowita, ponieważ jedna z liczb n, $n+1$ jest parzysta. W ten sposób zakończymy rozwiązanie zadania.

Zauważmy, że

$$\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2-\left(\frac{(n-1)\cdot n}{2}\right)^2=\frac{n^2\cdot((n+1)^2-(n-1)^2)}{4}=\frac{n^2\cdot(4n)}{4}=n^3\,.$$

Stąd

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+(n-1)^3+n^3=\left(\left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)^2-\left(\frac{0\cdot 1}{2}\right)^2\right)+\left(\left(\frac{2\cdot 3}{2}\right)^2-\left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)^2\right)+$$
$$+\left(\left(\frac{3\cdot 4}{2}\right)^2-\left(\frac{2\cdot 3}{2}\right)^2\right)+\left(\left(\frac{4\cdot 5}{2}\right)^2-\left(\frac{3\cdot 4}{2}\right)^2\right)+\ldots+$$
$$+\left(\left(\frac{(n-1)\cdot n}{2}\right)^2-\left(\frac{(n-2)\cdot(n-1)}{2}\right)^2\right)+\left(\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2-\left(\frac{(n-1)\cdot n}{2}\right)^2\right)=$$
$$=\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2-\left(\frac{0\cdot 1}{2}\right)^2=\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2,$$

czego należało dowieść.

---

17. *Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich x, y, istnieje taka liczba całkowita dodatnia $n\leqslant 1000000$, że każda z liczb nx oraz ny ma w zapisie dziesiętnym na trzech pierwszych miejscach po przecinku same dziewiątki lub same zera.*

Rozwiązanie

Każdej z liczb całkowitych dodatnich $n\leqslant 1000000$ przypiszmy parę liczb trzycyfrowych (dopuszczamy zera na początku zapisu liczby) utworzonych z trzech cyfr po przecinku występujących w liczbach nx oraz ny.

Ponieważ takich par jest 1000000, musi zajść co najmniej jeden z poniższych przypadków:

1° Pewnej liczbie n przypisaliśmy parę (000, 000). Oznacza to, że każda z liczb nx oraz ny ma po przecinku trzy zera.

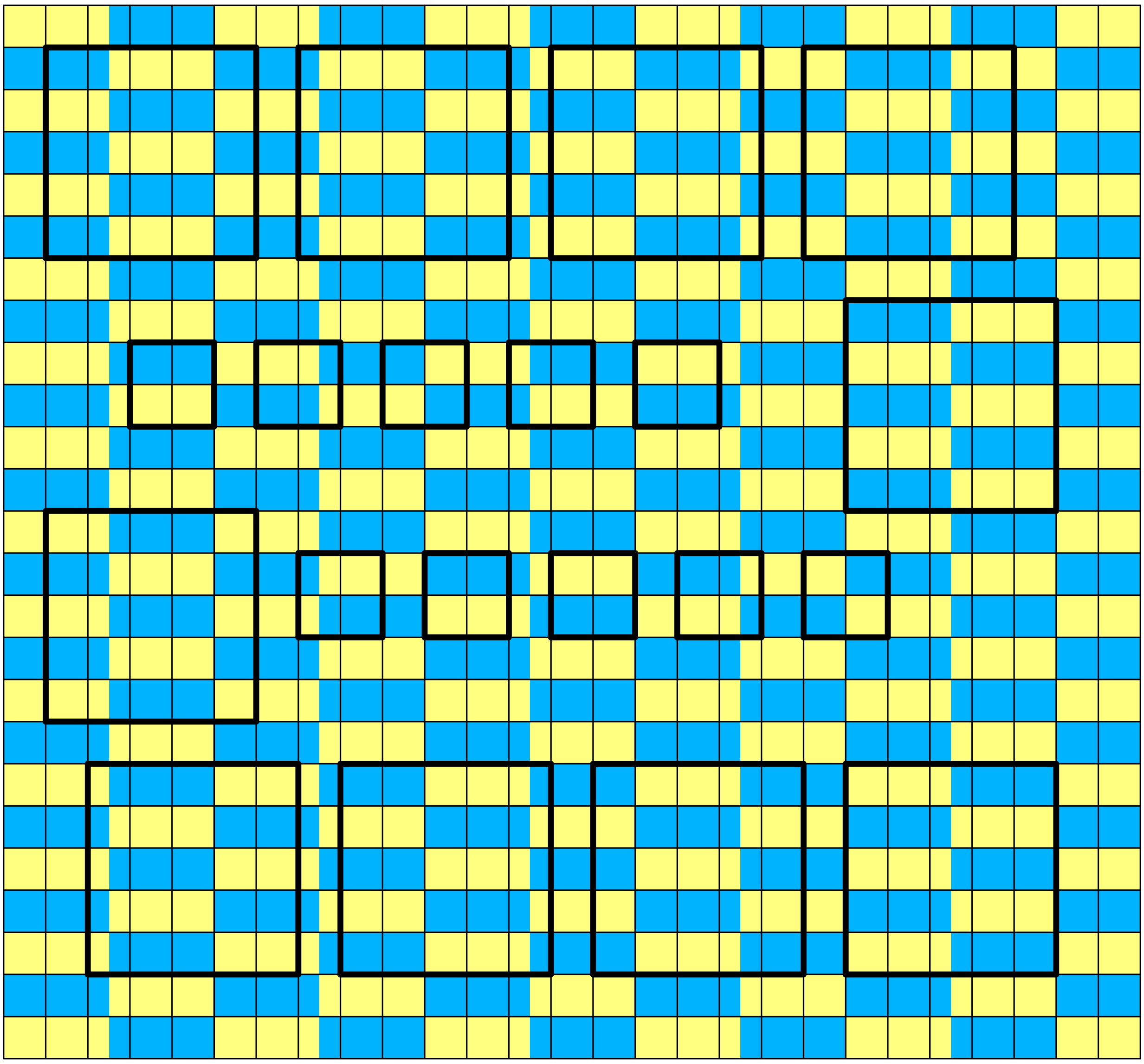
2° Żadnej z liczb nie przypisaliśmy pary (000, 000). Wówczas każdej z miliona liczb przypisaliśmy jedną z pozostałych 999999 par. Z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że pewnym dwóm liczbom, niech będą to $p<q$, przypisaliśmy tę samą parę liczb trzycyfrowych. Skoro liczby px i qx mają po przecinku taką samą trójkę cyfr, ich różnica $(q-p)x$ ma po przecinku trzy zera lub trzy dziewiątki. Identyczne rozumowanie prowadzi do wniosku, że także liczba $(q-p)y$ ma po przecinku trzy zera lub trzy dziewiątki. Zatem warunki zadania są spełnione przez liczbę $n=q-p$.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

18. *Rozważamy wszystkie możliwe podziały prostokąta 77×75 na kwadraty 1×1, 2×2 i 5×5. Wyznacz najmniejszą liczbę kwadratów 1×1, jaka może pojawić się w takim podziale.*

Rozwiązanie

Pokolorujmy prostokąt w żółto-niebieską szachownicę o polach wymiaru $1\times 2{,}5$ jak na rys. 1, gdzie zamiast prostokąta 77×75 przedstawiono jego prawy dolny fragment o wymiarach 27×25.



rys. 1

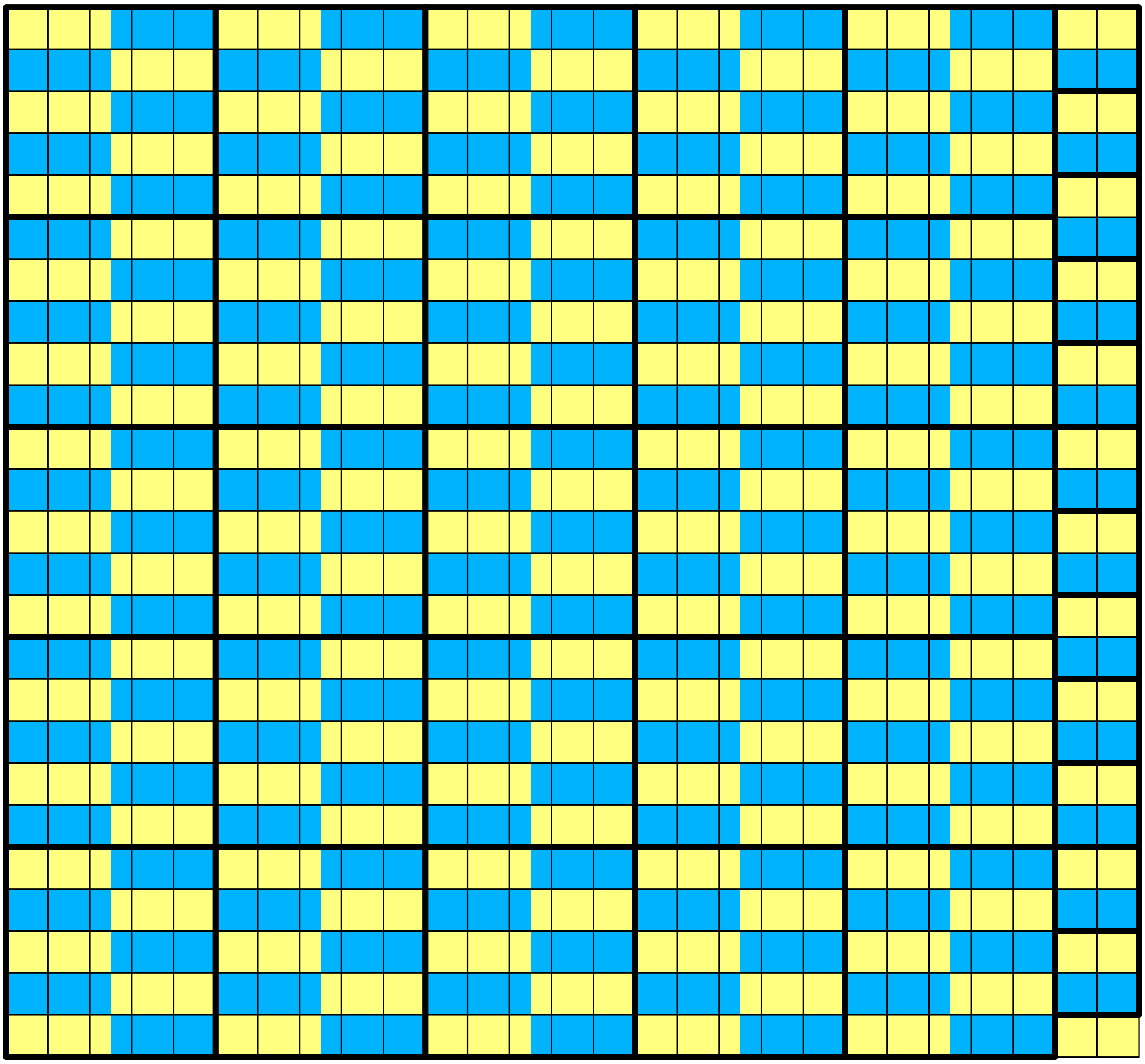
Wówczas każdy kwadrat o wymiarach 2×2 lub 5×5, umieszczony na wyjściowej szachownicy 77×75, pokrywa tyle samo pola żółtego, co niebieskiego (patrz rys. 1).

Jednak w całym prostokącie 77×75 pole żółte zajmuje powierzchnię o 2 większą niż pole niebieskie, co można prześledzić na rys. 2: pogrubione kwadraty oraz część szachownicy poza rysunkiem zawierają tyle samo pola żółtego, co niebieskiego.

Stąd wniosek, że w każdym podziale prostokąta 77×75 na kwadraty 1×1, 2×2 i 5×5 muszą wystąpić co najmniej dwa kwadraty 1×1.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na rys. 2 przedstawiono fragment podziału, w którym występują dokładnie dwa kwadraty 1×1 (pozostałą część szachownicy można pokryć kwadratami 5×5 i jedną kolumną kwadratów 2×2).



rys. 2

Odpowiedź

Najmniejsza możliwa liczba kwadratów 1×1 występujących w podziałach prostokąta spełniających warunki zadania jest równa 2.

---

19. *Niech $ABCD$ będzie takim czworokątem wypukłym, że $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC$ oraz punkt przecięcia symetralnych boków DA i BC leży na odcinku AB. Udowodnij, że $AC = BD$.*

Rozwiązanie

Niech E będzie punktem przecięcia odcinka AB i symetralnych boków AD i BC. Mamy wówczas $AE = DE$ oraz $BE = CE$. W takim razie mamy również

$$\sphericalangle BED = \sphericalangle EAD + \sphericalangle EDA = 2 \cdot \sphericalangle EAD = 2 \cdot \sphericalangle EBC = \sphericalangle EBC + \sphericalangle ECB = \sphericalangle CEA.$$

Z powyższych równości otrzymujemy przystawanie trójkątów BED i CEA, a więc w szczególności równość odcinków BD i CA.

---

20. *Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność*

$$\frac{1}{5}+\frac{2}{20}+\frac{3}{85}+\frac{4}{260}+\frac{5}{629}+\frac{6}{1300}+\ldots+\frac{n}{n^4+4}<\frac{3}{8}.$$

Rozwiązanie

Korzystając z równości

$$\frac{n}{n^4+4}=\frac{n}{((n-1)^2+1)\cdot((n+1)^2+1)}=\frac{((n+1)^2+1)-((n-1)^2+1)}{4\cdot((n-1)^2+1)\cdot((n+1)^2+1)}=$$

$$=\frac{1}{4\cdot((n-1)^2+1)}-\frac{1}{4\cdot((n+1)^2+1)}\,,$$

otrzymujemy następujące zależności

$$\frac{1}{5}+\frac{2}{20}+\frac{3}{85}+\frac{4}{260}+\frac{5}{629}+\frac{6}{1300}+\ldots+\frac{n}{n^4+4}=$$

$$=\left(\frac{1}{4\cdot 1}-\frac{1}{4\cdot 5}\right)+\left(\frac{1}{4\cdot 2}-\frac{1}{4\cdot 10}\right)+\left(\frac{1}{4\cdot 5}-\frac{1}{4\cdot 17}\right)+\left(\frac{1}{4\cdot 10}-\frac{1}{4\cdot 26}\right)+\left(\frac{1}{4\cdot 17}-\frac{1}{4\cdot 37}\right)+$$

$$+\ldots+\left(\frac{1}{4\cdot((n-4)^2+1)}-\frac{1}{4\cdot((n-2)^2+1)}\right)+\left(\frac{1}{4\cdot((n-3)^2+1)}-\frac{1}{4\cdot((n-1)^2+1)}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{4\cdot((n-2)^2+1)}-\frac{1}{4\cdot(n^2+1)}\right)+\left(\frac{1}{4\cdot((n-1)^2+1)}-\frac{1}{4\cdot((n+1)^2+1)}\right)=$$

$$=\frac{1}{4\cdot 1}+\frac{1}{4\cdot 2}-\frac{1}{4\cdot(n^2+1)}-\frac{1}{4\cdot((n+1)^2+1)}<\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}\,,$$

co kończy dowód.

Urszula Pastwa
Kierownik naukowy obozu