Treści zadań Obozu Naukowego Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Poziom: OM

(Perzanowo, 3–9 czerwca 2012 r.)

1. Dane są takie liczby całkowite dodatnie a, b, c, d, że każda z liczb $ab-1$, $bc-1$ i $ac-1$ jest podzielna przez d. Wykaż, że również liczba $a^2+b^2+c^2-3$ jest podzielna przez d.

2. W pewnej grupie jest $2n$ osób. Wśród nich nie ma takich trzech osób, że każde dwie z nich się znają. Ile maksymalnie może być par osób, które się znają?

3. Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC. Dwusieczna kąta ADC przecina bok AC w punkcie M, a dwusieczna kąta BDC przecina bok BC w punkcie N. Udowodnij, że prosta MN jest równoległa do prostej AB wtedy i tylko wtedy, gdy punkt D jest środkiem odcinka AB.

4. Wyznacz wszystkie czwórki liczb rzeczywistych a,b,c,d spełniające układ równań

$$\begin{cases} a+b+c+d=4 \\ ab+bc+cd+da=4\,. \end{cases}$$

5. Rozstrzygnij, czy w wyrażeniu

$$\pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm \ldots \pm 2012^2$$

można tak dobrać znaki $\pm$, aby jego wartość była równa 2012.

6. Dany jest taki niepusty zbiór kół leżących w jednej płaszczyźnie, że ich wnętrza są parami rozłączne. Każde z tych kół jest styczne do dokładnie sześciu innych kół z tego zbioru. Wykaż, że kół jest nieskończenie wiele.

7. Dany jest okrąg ω o średnicy AB. Okrąg o, styczny do okręgu ω, jest styczny do odcinka AB w punkcie E. Cięciwa CD okręgu ω jest prostopadła do AB, styczna do okręgu o i przecina odcinek AE. Wykaż, że $AE=AC$.

8. Wykaż, że istnieje takich 101 kolejnych liczb naturalnych, że „środkowa” liczba nie ma dzielnika pierwszego mniejszego od 100, a każda z pozostałych liczb ma dzielnik pierwszy mniejszy od 100.

9. W grafie o 14 wierzchołkach każde dwa wierzchołki są połączone białą lub czerwoną krawędzią. Wykaż, że można wybrać takie trzy wierzchołki, że każde dwa są połączone białą krawędzią lub takich pięć wierzchołków, że każde dwa są połączone czerwoną krawędzią.

10. Punkt S jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Okrąg o przechodzi przez punkty B, C, S. Wykaż, że okrąg o wyznacza na prostych AB i AC równe cięciwy.

11. Różne liczby naturalne $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dają co najmniej $k+1$ różnych reszt z dzielenia przez $n+k$. Wykaż, że ze zbioru tych liczb można wybrać niepusty podzbiór o sumie podzielnej przez $n+k$.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI · Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej · MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ · ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji · UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

12. Dla różnych liczb pierwszych p, q, niech $R(p,q) = \frac{r}{q}$, gdzie r jest odwrotnością liczby p modulo q (czyli najmniejszą taką liczbą całkowitą dodatnią, że liczba $rp-1$ jest podzielna przez q). Niech (p_n) oznacza ciąg kolejnych liczb pierwszych. Wykaż, że dla nieskończenie wielu liczb naturalnych k zachodzi nierówność

$$\sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant k \\ i \neq j}} R(p_i, p_j) > \binom{k}{2}.$$

13. Czy szachownicę 2012×2012 można pokryć klockami 5×5 i 7×7?

14. Dana jest taka liczba pierwsza $p > 3$, że liczby $2p-1$ oraz $3p-2$ są pierwsze. Niech $n = p(2p-1)(3p-2)$. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej k liczba $k^n - k$ jest podzielna przez n.

15. Jaśminka chce powołać komisję, która rozstrzygnie czy ładniejsze są kotki czy aniołki. Każdy z członków komisji wybierze aniołka z takim samym prawdopodobieństwem $p \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, przy czym decyzje poszczególnych członków komisji są niezależne. Komisja podejmuje decyzję większością głosów, a w przypadku remisu rozstrzygnięcia dokonuje rzucając monetą. Która komisja z większym prawdopodobieństwem wybierze aniołka: 2011-osobowa czy 2012-osobowa?

16. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD i taki punkt E wewnątrz trapezu, że $\sphericalangle AED = \sphericalangle BEC = 90°$. Punkt S jest punktem przecięcia przekątnych trapezu. Wykaż, że jeśli $E \neq S$, to prosta ES jest prostopadła do podstaw trapezu.

Mecz matematyczny

17. Dana jest taka liczba całkowita a, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $2^n + a$ jest potęgą liczby pierwszej o wykładniku naturalnym. Wykaż, że a jest równe 0.

18. Wykaż, że dla dowolnej liczby pierwszej p istnieje taka liczba naturalna n, że liczba $2^n + 3^n + n$ jest podzielna przez p.

19. Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg o_1. Proste AB i CD przecinają się w punkcie P. Okrąg o_2 przechodzi przez punkty A i B oraz przecina prostą CD w punktach E i F. Udowodnij, że punkt P oraz środki okręgów opisanych na trójkątach BCE i ADF leżą na jednej prostej.

20. Okrąg o jest wpisany w czworokąt $ABCD$. Proste równoległe do prostej BD są styczne do okręgu o odpowiednio w punktach K i L, przy czym K leży po tej samej stronie prostej BD, co punkt A. Wykaż, że proste AK, CL i BD przecinają się w jednym punkcie.

21. Rozstrzygnij, czy istnieje czworościan, w którym środki okręgów opisanych na ścianach są współliniowe.

22. Dany jest sześcian $8 \times 8 \times 8$. Czy używając 64 pasków papieru o wymiarach 1×3 można pokryć jego trzy ściany o wspólnym wierzchołku?

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

23. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n wartość wyrażenia

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k} \binom{n}{k} \binom{2n-k}{n}$$

można przedstawić w postaci a^2b^3 dla pewnych liczb naturalnych a,b.

24. Koko i Spoko grają w następującą grę. Na początku gry na stole znajduje się n monet o nominale 1 EURO każda. Ruch polega na zabraniu ze stołu jednej monety, czterech monet lub liczby monet będącej dzielnikiem pierwszym kwoty na stole. Gracze wykonują ruchy na przemian, zaczyna Koko. Wygrywa ten, kto zabierze ze stołu ostatnią monetę. Rozstrzygnij, w zależności od n, który z graczy ma strategię wygrywającą.

25. Ciąg (a_n) jest określony następująco: $a_0=2$ oraz $a_{n+1}=2a_n^2-1$ dla naturalnych n. Wykaż, że liczba $a_{2102!}$ nie jest podzielna przez $2012!+1$.

26. Wykaż, że dla dowolnych niezerowych liczb rzeczywistych a, b, c spełniona jest nierówność

$$2b^2+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\sqrt{2a^4+2c^4}\geqslant 2\sqrt{3}\,.$$

27. Wyznacz największą wartość wyrażenia

$$x_1x_2x_3+x_2x_3x_4+\ldots+x_{2010}x_{2011}x_{2012}+x_{2011}x_{2012}x_1+x_{2012}x_1x_2\,,$$

gdzie $x_1,x_2,\ldots,x_{2012}$ są liczbami rzeczywistymi nieujemnymi spełniającymi warunek

$$x_1+x_2+\ldots+x_{2012}=2012\,.$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego