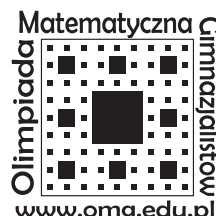


# Treści zadań Obozu Naukowego Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Poziom: OMG

(Perzanowo, 10–16 czerwca 2012 r.)



1. Okrąg wpisany w trójkąt  $ABC$  jest styczny do boków  $BC$ ,  $CA$  i  $AB$  odpowiednio w punktach  $D$ ,  $E$ ,  $F$ . Prosta równoległa do  $AB$ , przechodząca przez punkt  $C$ , przecina proste  $FE$  i  $FD$  odpowiednio w punktach  $K$  i  $L$ . Wykaż, że na czworokącie  $KEDL$  można opisać okrąg.

2. Dany jest taki trójkąt ostrokątny  $ABC$ , że  $\sphericalangle ACB = 45^\circ$ . Wysokości tego trójkąta przecinają się w punkcie  $H$ . Wykaż, że  $CH = AB$ .

3. Dany jest taki czworokąt wypukły  $ABCD$ , że wierzchołki  $A$  i  $C$ , środek przekątnej  $BD$  oraz środki okręgów opisanych na trójkątach  $ABD$  i  $CBD$  leżą na jednej prostej. Udowodnij, że

$$AB^{2012} + BC^{2012} = AD^{2012} + DC^{2012}.$$

4. Ile zer znajduje się na końcu liczby  $2012!$  zapisanej w systemie dziesiętnym?

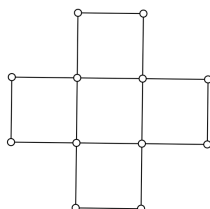
5. Wujek Jarek ma 20 torebek z cukierkami. Liczba cukierków w każdej torebce jest dodatnia i nie większa od 2012. Udowodnij, że wujek Jarek może tak obdarować Zuzię i Jaśminkę, aby każda z dziewczynek dostała taką samą liczbę torebek, zawierających łącznie taką samą liczbę cukierków.

6. Na wyspach Bergamutach podobno jest 2010 kotów w butach, 2011 uczonych łososiów, 2012 kur samograjek i 2015 starych wielorybów. Gdy spotykają się dwa zwierzęta należące do różnych gatunków, to zamieniają się w dwa zwierzęta należące do dwóch pozostałych gatunków. Rozstrzygnij, czy może się zdarzyć, że po pewnym czasie na wyspach Bergamutach będzie po 2012 przedstawicieli każdego gatunku.

7. Wyznacz wszystkie pary niezerowych liczb rzeczywistych  $(a, b)$  spełniające równanie

$$a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{b}{a} = \sqrt{3}.$$

8. Czy szachownicę  $2014 \times 2014$  z usuniętym jednym narożnym polem można pokryć klockami  $5 \times 1$  i klockami w kształcie krzyżyka jak na rysunku?



9. W trójkącie prostokątnym o bokach długości całkowitej suma ósmych potęg długości boków jest podzielna przez 127. Wykaż, że jest ona podzielna przez  $127^2$ .

10. Dane są takie liczby  $x, y, z$ , że  $x + y + z = 0$  oraz  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ . Wykaż, że

$$x^4 + y^4 + z^4 \geq 127.$$

11. Na okręgu opisano 127-kąt  $A_1A_2A_3 \dots A_{127}$ , którego każdy bok ma długość będącą liczbą całkowitą. Bok  $A_1A_2$  ma długość 1 i jest styczny do okręgu w punkcie  $P$ . Udowodnij, że

$$\frac{63}{127} \leq A_1P \leq \frac{64}{127}.$$

12. Czy istnieje ostrosłup 127-kątny, którego wszystkie ściany boczne są trójkątami prostokątnymi?

13. Wujek Szymon ma 170 torebek z cukierkami. Chce obdarować 13 dziewczynek tak, by każda otrzymała co najmniej dwie torebki. Udowodnij, że może to zrobić tak, by liczby cukierków otrzymanych przez dziewczynki były podzielne przez 13.

14. Dane są takie liczby naturalne  $a, b, c, n$ , że liczby  $a + b^3$ ,  $b + c^4$  i  $c + a^5$  są podzielne przez  $n$ . Udowodnij, że liczba  $a^{119} - a$  również jest podzielna przez  $n$ .

15. Na szachownicy  $20 \times 20$  umieszczono 48 kwadratów  $2 \times 2$  tak, że każdy pokrywa 4 pola. Wykaż, że na szachownicy można umieścić jeszcze jeden kwadrat  $2 \times 2$  tak, by pokrywał 4 wolne pola.

16. Okręgi  $o_1$  i  $o_2$  są styczne zewnętrznie w punkcie  $B$ . Prosta przechodząca przez punkt  $B$  przecina okręgi  $o_1$  i  $o_2$  odpowiednio w punktach  $A$  i  $C$ , różnych od  $B$ . Okrąg  $o$  przechodzi przez punkty  $A$  i  $C$  i przecina okrąg  $o_1$  w punkcie  $D$ . Prosta  $DB$  przecina okrąg  $o$  w punkcie  $E$ . Odcinek  $EC$  przecina okrąg  $o_2$  w punkcie  $F$ . Udowodnij, że trójkąt  $BCF$  jest równoramienny.

17. Niech  $p, q$  będą różnymi liczbami pierwszymi większymi od 2. Ile jest liczb całkowitych dodatnich  $n$  mniejszych od  $pq$ , dla których liczba  $n^3 - n$  jest podzielna przez  $pq$ ?

18. Liczby  $a, b, c$  są długościami boków pewnego trójkąta. Wykaż, że

$$(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \leq abc.$$

19. Ile co najwyżej skoczków można ustawić na szachownicy o wymiarach  $100 \times 100$  tak, by żadne dwa sobie nie zagrażały?

*Uwaga:* Dwa skoczki zagrażają sobie, gdy stoją na przeciwległych narożnych polach pewnego prostokąta o wymiarach  $2 \times 3$ .

20. Czworokąt  $ABCD$  jest wpisany w okrąg  $o$ . Punkt  $M$  jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt  $ABC$  i półprosta  $AM$  przecina okrąg  $o$  w punkcie  $E$ . Punkt  $N$  jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt  $ADC$  i półprosta  $AN$  przecina okrąg  $o$  w punkcie  $F$ . Wykaż, że jeżeli odcinki  $ME$  i  $NF$  są równej długości, to  $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DAC$ .

## Mecz matematyczny

21. Udowodnij, że dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej  $x$  istnieje taka dodatnia liczba całkowita  $n \leq 1000$ , że liczba  $nx$  ma w zapisie dziesiętnym na trzech pierwszych miejscach po przecinku same dziewiątki lub same zera.

- 22.** W kole o promieniu 18 wybrano 2267 punktów. Wykaż, że istnieje pierścień o promieniach 1 i 2, który zawiera nie mniej niż 18 spośród tych punktów.
- 23.** Okrąg wpisany w trójkąt  $ABC$  jest styczny do boków  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  odpowiednio w punktach  $K$ ,  $L$ ,  $M$ . Punkty  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  są środkami okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty  $ALM$ ,  $BMK$ ,  $CKL$ . Wykaż, że proste  $KP$ ,  $LQ$ ,  $MR$  przecinają się w jednym punkcie.
- 24.** Dany jest trójkąt  $ABC$ . Punkt  $X$  należy do boku  $AB$  tego trójkąta. Wspólna zewnętrzna styczna do okręgów wpisanych w trójkąty  $AXC$  i  $BXC$ , różna od prostej  $AB$ , przecina odcinek  $CX$  w punkcie  $Y$ . Wykaż, że długość odcinka  $CY$  nie zależy od wyboru punktu  $X$ .
- 25.** Podstawą ostrosłupa  $ABCD$  jest trójkąt prostokątny  $BCD$  o kącie prostym przy wierzchołku  $D$ . Punkt  $B$  jest spodkiem wysokości tego ostrosłupa. Dane są  $BD=p$ ,  $CD=q$ ,  $AB=s$ . Oblicz promień sfery wpisanej w ten ostrosłup.
- 26.** Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych  $a, b, c$  spełniających warunek  $a+b+c \geq 0$  zachodzi nierówność
- $$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \geq abc.$$
- 27.** W każde pole szachownicy  $13 \times 13$  wkręcono żarówkę. W jednym ruchu można zmienić stan (zapalona / zgaszona) 4 żarówek zajmujących kwadrat  $2 \times 2$  lub 81 żarówek zajmujących kwadrat  $9 \times 9$ . Czy zaczynając od dowolnego układu można za pomocą takich ruchów zgasić wszystkie żarówki?
- 28.** Na okręgu znajduje się  $n \geq 4$  lamp. Przy każdej z nich znajduje się przełącznik, który zmienia stan (zapalona / zgaszona) tej lampy i jej dwóch sąsiadów. Na początku jedna lampa jest zapalona, a pozostałe są zgaszone. Dla których  $n$  można za pomocą przełączników doprowadzić do tego, by wszystkie lampy były zgaszone?
- 29.** Rozstrzygnij, czy jest wymierna liczba  $0,11235831459\dots$ , której każda cyfra, począwszy od trzeciej po przecinku, jest cyfrą jedności sumy dwóch cyfr poprzednich.
- 30.** Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej  $n$  liczba  $(n^2)!$  jest podzielna przez  $(n!)^{n+1}$ .
- 31.** Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej  $n > 1$  liczba  $n^4 + 4^n$  jest złożona.

