

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Wstęp

Zbiór „Mój przedmiot matematyka” jest zestawem 132 scenariuszy przeznaczonych dla uczniów szczególnie zainteresowanych matematyką. Scenariusze mogą być wykorzystywane przez nauczycieli zarówno na typowych zajęciach lekcyjnych wpisanych w zakres podstawowy, jak też w ramach dodatkowych zajęć poszerzających wiedzę uczniów, np. koła zainteresowań. Scenariusze wymagają zastosowania komputerów z dostępem do internetu. Takie wyposażenie pozwoli na wykorzystanie środków dydaktycznych przewidzianych w projekcie „Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy” takich jak moduły e-learningowe: „Elementy statystyki i rachunek prawdopodobieństwa”, „Funkcja kwadratowa”, „Równania i nierówności liniowe i kwadratowe”, „Wielomiany”, gry strategiczne „Wyprawa Nasreddina”, „Herbatka u królowej Anglii”, „Wyprawa na grzyby”, „Matemafia” oraz „Międzykontynentalna szkoła”, poradniki „Ciągi”, „Planimetria”, „Trygonometria”, „Geometria analityczna”. Scenariusze mogą być realizowane na zajęciach lekcyjnych jako całość lub nauczyciel dokonuje wyboru określonych materiałów zgodnie z zaplanowanymi przez siebie tematami – zwiększa to elastyczność stosowania pakietu np. w sytuacji braku zapewnienia w placówce odpowiednich warunków technicznych do realizacji materiału w oparciu o cały pakiet.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Spis scenariuszy

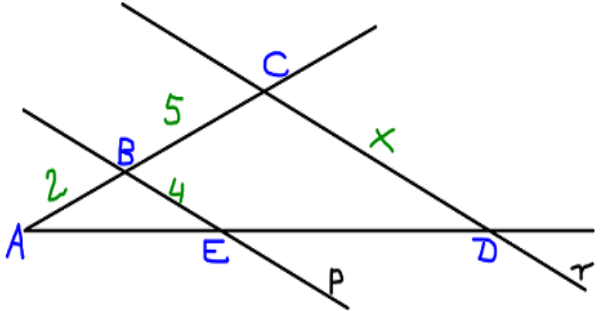
Wstęp	1
Scenariusz nr 1: Cechy podobieństwa trójkątów i ich zastosowanie	3
Scenariusz nr 2: Międzykontynentalna szkoła – z matematyką przez świat	8
Scenariusz nr 3: Czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu.....	10
Scenariusz nr 4: Figury jednokładne; twierdzenie o związkach miarowych między odcinkami stycznych i siecznych	16
Scenariusz nr 5: Figury podobne. Twierdzenie Talesa.....	23
Scenariusz nr 6: Kąty w okręgu.....	30
Scenariusz nr 7*: Twierdzenie sinusów i cosinusów	38

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Scenariusz nr 1: Cechy podobieństwa trójkątów i ich zastosowanie

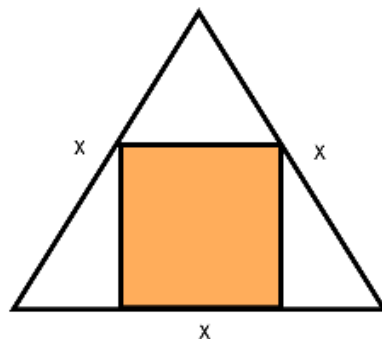
Temat zajęć		Cechy podobieństwa trójkątów i ich zastosowanie
Dział		Planimetria
Klasa (poziom edukacyjny)		Klasa II (IV etap edukacyjny)
Czas trwania zajęć		45 minut
Lp.	Element scenariusza	Treść zajęć
1	Cel ogólny	<ul style="list-style-type: none"> • Usystematyzowanie wiadomości o cechach podobieństwa trójkątów • Kształcenie umiejętności wyszukiwania i selekcjonowania informacji
2	Cele szczegółowe	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> • na cechy podobieństwa trójkątów; • potrafi wyznaczyć długości boków trójkątów podobnych, skalę podobieństwa trójkątów; • korzysta z cech podobieństwa trójkątów przy rozwiązywaniu zadań.
3	Formy i metody	<ul style="list-style-type: none"> • Praca indywidualna • Praca w parach • Ćwiczenia
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	Tablica interaktywna, karty pracy ucznia.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

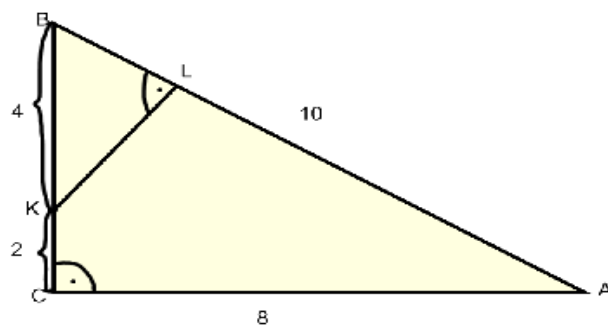
5	Wprowadzenie do zajęć	Przed rozpoczęciem zajęć warto przypomnieć uczniom, czym charakteryzują się wielokąty podobne (tzn. dwa wielokąty o tej samej liczbie boków są podobne, jeśli odpowiednie kąty są równe i odpowiednie odcinki są proporcjonalne). Można wykorzystać prezentację multimedialną „Figury podobne”.
6	Przebieg zajęć (pełna wersja)	<p>Nauczyciel przypomina cechy trójkątów podobnych. W dalszej części lekcji uczniowie rozwiązują zadania zamieszczone w karcie pracy ucznia. Zadania nr 1, 2, 3 są rozwiązywane wspólnie z wykorzystaniem tablicy interaktywnej, zadania zamknięte uczniowie rozwiązują w parach lub w trzyosobowych zespołach. Wykorzystywana jest tablica interaktywna, która doskonale ułatwia sporządzanie rysunków, zaznaczanie istotnych elementów zadania kolorem.</p> <p>Karta pracy ucznia:</p> <p>Zad. 1. Czy trójkąty o bokach długości $\sqrt{50}, \sqrt{72}, \sqrt{98}$ oraz 5, 6, 7 są podobne? Jeśli tak, ustal skalę podobieństwa. Odpowiedź uzasadnij.</p> <p>Zad.2. Proste p i r są równoległe (patrz rysunek). Oblicz długość odcinka x wykorzystując dane na rysunku:</p> 

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

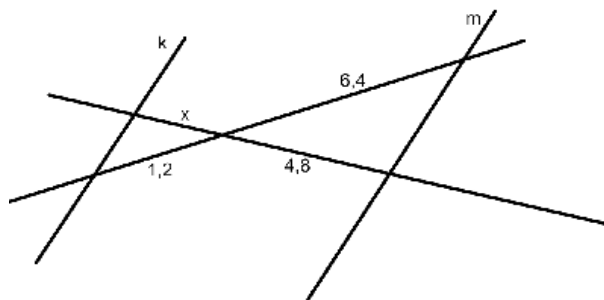
Zad. 3. W trójkąt równoboczny o boku x wpisano kwadrat (patrz rysunek). Oblicz długość boku kwadratu.



Zad. 4. Korzystając z danych na rysunku, oblicz długość odcinka KL.



Zad.4.



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

		<p>Proste k oraz m na rysunku obok są równoległe. Długość odcinka x jest równa: A. 0,9 B. 1,6 C. 2,4 C. 3,6</p> <p>Zad. 5. Wysokość trójkąta prostokątnego poprowadzona z wierzchołka kąta prostego ma długość 5 i dzieli przeciwprostokątną na dwa odcinki, z których jeden ma długość 1. Przeciwprostokątna tego trójkąta ma długość: A. 6 B. 25 C. 26 D. 30</p> <p>Zad. 6. Trójkąt ABC jest podobny do trójkąta KLM. Kąty przy wierzchołkach C i M są proste. Najdłuższy bok trójkąta KLM ma długość 39, a dwa krótsze boki trójkąta ABC mają długości 12 i 5. Skala podobieństwa trójkątów jest równa: A. $\frac{39}{12}$ B. $\frac{39}{5}$ C. $\frac{39}{3}$ D. $\frac{39}{13}$</p>
7	Podsumowanie zajęć	Na zakończenie zajęć nauczyciel podsumowuje pracę na lekcji, aktywność uczniów. Podkreśla, jak ważne znaczenie odgrywa odpowiednie przyporządkowanie długości boków trójkąta, zaś podczas rozwiązywania zadań należy powoływać się na odpowiednią cechę podobieństwa trójkątów (wskazując na odpowiednie boki czy też kąty).
8	Uwagi metodyczne do realizacji	Bez uwag

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Załączniki do scenariusza nr 1

Prezentacja multimedialna: „Podobieństwo figur”.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Scenariusz nr 2: Międzykontynentalna szkoła – z matematyką przez świat

Temat zajęć		Międzykontynentalna szkoła – z matematyką przez świat
Dział		Planimetria i stereometria
Klasa (poziom edukacyjny)		IV poziom edukacyjny
Czas trwania zajęć		90 minut
Lp.	Element scenariusza	Treść zajęć
1	Cel ogólny	<ul style="list-style-type: none"> • Usystematyzowanie wiadomości z planimetrii oraz stereometrii • Ćwiczenie umiejętności praktycznego wykorzystania wiedzy • Ukazanie praktycznych zastosowań matematyki • Kształtowanie umiejętności korzystania z programów multimedialnych
2	Cele szczegółowe	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> • dostrzega matematykę w życiu codziennym, szczególnie w architekturze • zna i umie zastosować wzory na obliczanie pól powierzchni figur płaskich oraz pól powierzchni i objętości figur przestrzennych • poprawnie wykorzystuje własności figur płaskich • umiejętnie łączy wiedzę teoretyczną z wiedzą praktyczną • rozwiązuje problemy w sposób twórczy
3	Formy i metody	<ul style="list-style-type: none"> • Objasnienie zasad pracy obowiązujących podczas gry komputerowej • Praca indywidualna przy komputerze
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym	Mobilna pracownia komputerowa.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

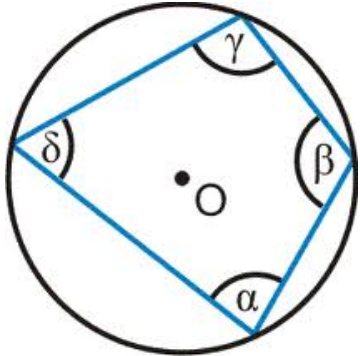
	wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	
5	Wprowadzenie do zajęć	Gra „Międzykontynentalna szkoła” skierowana jest do uczniów, którzy realizowali zagadnienia związane z własnościami figur płaskich i przestrzennych, zatem najlepiej przeprowadzić zajęcia w klasach kończących szkołę (maturalnych).
6	Przebieg zajęć (<i>pełna wersja</i>)	Na wstępie nauczyciel informuje o celach lekcji, omawia organizację pracy na lekcji, następnie uczniowie zostają zapoznani z fabułą i zasadami gry „Międzykontynentalna szkoła”. Zadania zamieszczone w grze nawiązują do najczęściej bardzo znanych obiektów architektonicznych znajdujących się na pięciu kontynentach globu ziemskiego, uwzględniają ciekawostki matematyczne z nimi związane, ukazują zastosowanie matematyki w życiu codziennym. Różny jest stopień trudności zadań, rozwiązanie zaś wszystkich zadań gwarantuje uczniowi uzyskanie wirtualnego certyfikatu kończącego pięcioletnią Międzykontynentalną szkołę, a przede wszystkim pozwoli na utrwalenie wiadomości z planimetrii i stereometrii, z jednoczesnym zastosowaniem matematyki w życiu codziennym.
7	Podsumowanie zajęć	Nauczyciel ocenia pracę uczniów na lekcji.
8	Uwagi metodyczne do realizacji	Do realizacji głównie w klasach kończących szkołę.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

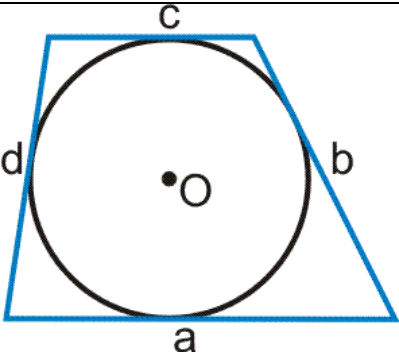
Scenariusz nr 3: Czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu

Temat zajęć		Czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu
Dział		Planimetria
Klasa (poziom edukacyjny)		Klasa druga lub jako materiał powtórzeniowy do matury w klasie trzeciej lub czwartej
Czas trwania zajęć		90 min.
Lp.	Element scenariusza	Treść zajęć
1	Cel ogólny	<ul style="list-style-type: none"> • Kształcenie umiejętności samodzielnego dochodzenia do wiedzy • Rozwijanie umiejętności czytania zadań ze zrozumieniem • Opisywanie obiektów językiem matematycznym • Poznanie twierdzeń dotyczących okręgu wpisanego i opisanego na czworokącie
2	Cele szczegółowe	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> • wie kiedy w czworokąt można wpisać okrąg; • wie kiedy na czworokącie można opisać okrąg; • potrafi zastosować poznane twierdzenia do rozwiązywania zadań.
3	Formy i metody	<ul style="list-style-type: none"> • Pogadanka • Praca z zespołem klasowym • Praca samodzielna
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków)	<p>Lekcję prowadzimy wykorzystując mobilną pracownię komputerową aby każdy uczeń miał samodzielny dostęp do komputera.</p> <p>Wykorzystujemy tablicę interaktywną (zastępuje rzutnik, jej narzędzia wykorzystujemy do</p>

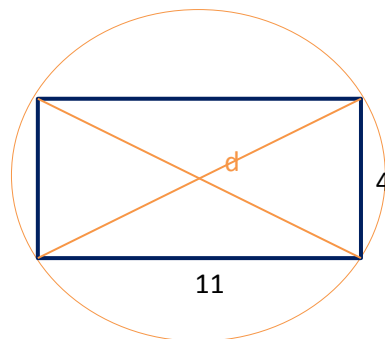
Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

	opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	rozwiązywania zadań, ma możliwość zapisania rozwiązań i wykorzystania ich w dowolnej chwili a także można przekazać je uczniom w postaci pliku) oraz poradnik multimedialny – temat2 z planimetrii.
5	Wprowadzenie do zajęć	<p>Uczniowie przypominają kiedy możemy okrąg opisać na wielokącie, a także kiedy okrąg możemy wpisać w wielokąt. Uwagę skupiamy na czworokątach.</p> <p>Temat 2*: Czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu.</p> <p>Okrąg jest opisany na wielokącie, gdy przechodzi przez wszystkie wierzchołki wielokąta. Środek takiego okręgu jest jednakowo oddalony od jego wierzchołków i leży na przecięciu symetralnych boków tego wielokąta.</p> <p><i>Na każdym trójkącie można opisać okrąg.</i></p> <p>Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar jego przeciwległych kątów są równe.</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p style="text-align: right;">$\alpha + \gamma = \delta + \beta$</p> <p>Okrąg jest wpisany w wielokąt czyli jest styczny do każdego boków tego wielokąta. Środek tego okręgu jest jednakowo odległy od jego boków i leży w punkcie przecięcia się dwusiecznych kątów tego wielokąta.</p> <p><i>W każdy trójkąt można wpisać okrąg.</i></p> <p>W czworokąt można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy czworokąt jest wypukły i sumy jego przeciwległych boków są równe.</p>

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

		 $a + c = b + d$
6	Przebieg zajęć (pełna wersja)	<p>Uczniowie poznają jak zastosować poznaną teorię (przykłady 1-5).</p> <p><u>Przykład 1</u> W czworokącie miary kątów wynoszą po kolei 70°, 100°, 110° i α. Jaką miarę powinien mieć kąt α, aby można było opisać okrąg na tym czworokącie.</p> <p><u>Rozwiązanie:</u> Korzystamy z tej własności, że na czworokącie można opisać okrąg gdy sumy przeciwległych kątów są takie same. W tym wypadku ma zachodzić:</p> $70^\circ + 110^\circ = 100^\circ + \alpha$ <p>Po czym wyliczamy, że $\alpha = 80^\circ$</p> <p><u>Przykład 2</u> Znajdź promień okręgu opisanego na prostokącie o bokach długości 4 i 11.</p> <p><u>Rozwiązanie:</u> Wykonujemy rysunek i widać, że promień okręgu opisanego na tym prostokącie jest równy połowie jego przekątnej.</p>

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”



Obliczamy długość przekątnej d :

$$4^2 + 11^2 = d^2$$

Stąd mamy, że $d^2 = 137$, więc $d = \sqrt{137}$.

Więc promień okręgu opisanego na tym prostokącie ma

$$\text{długość } R = \frac{\sqrt{137}}{2}.$$

Przykład 3

Sprawdź czy można wpisać okrąg w czworokąt wypukły, którego kolejne boki mają długość $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}$?

Rozwiązanie:

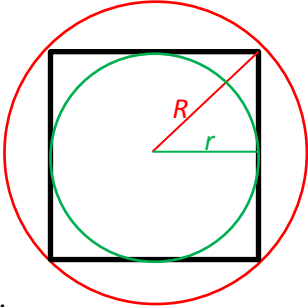
Sprawdzamy więc czy $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ po sprowadzeniu do wspólnego mianownika otrzymujemy

$$\frac{8}{12} = \frac{7}{12} \text{ co nie jest prawdą więc nie można wpisać okręgu w ten czworokąt.}$$

Przykład 4

Długości boków pewnego czworokąta są kolejnymi liczbami naturalnymi. Czy można wpisać okrąg w ten czworokąt?

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

		<p><u>Rozwiązanie:</u> Zapisujemy cztery kolejne liczby naturalne: $n, n + 1, n + 2, n + 3$. Sprawdzamy więc, czy sumy par boków są takie same. Zauważamy, że $n + 1 + n + 2 = n + n + 3$ więc można wpisać okrąg w ten czworokąt pod warunkiem że kolejne boki będą miały długości: $n + 1, n, n + 2, n + 3$.</p> <p><u>Przykład 5</u> Oblicz różnicę promieni okręgu opisanego na kwadracie o boku 5 i okręgu wpisanego w ten kwadrat.</p>  <p><u>Rozwiązanie:</u> Jak widać na rysunku promień okręgu opisanego na kwadracie to połowa jego przekątnej, zaś promień okręgu wpisanego w kwadrat to połowa jego boku. Mamy więc $R = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ i $r = \frac{5}{2}$. Szukana różnica ma wartość $R - r = \frac{5\sqrt{2}-5}{2}$.</p> <p>Podczas realizacji tematu uczniowie sami lub wraz z nauczycielem dokonują wpisów najistotniejszych informacji lub tworzą pytania w postaci notatek. Uczniowie rozwiążą zadania z zestawu 3 (zadania numer 3, 8) i zestawu 5 (zadania numer 1, 2, 6, 14) dołączonego do poradnika multimedialnego.</p>
7	Podsumowanie zajęć	Uczniowie przeglądają zapisane notatki. Sprawy problematyczne wyjaśniane są z nauczycielem.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

		<p>Uczniowie rozwiązują zadania: (używamy tablicy interaktywnej).</p> <p><u>Zadanie 1</u> W okrąg o promieniu r wpisano kwadrat i na tym samym okręgu opisano trójkąt równoboczny. Oblicz długość promienia okręgu, wiedząc, że suma długości boku kwadratu i boku trójkąta równobocznego równa się 12.</p> <p><u>Zadanie 2</u> Wysokość h rombu dzieli jeden z jego boków na odcinki o długościach 12 i 10. Oblicz pole rombu i promień okręgu wpisanego w ten romb.</p> <p><u>Zadanie 3</u> Koło jest wpisane w kwadrat. Oblicz stosunek pola koła do pola kwadratu.</p> <p><u>Zadanie 4</u> Na kwadracie opisano okrąg. Oblicz pole kwadratu wiedząc, że okrąg ma długość $\frac{\pi}{2}$.</p> <p><u>Zadanie 5</u> Na okręgu o promieniu 2,2 cm opisano trapez równoramienny, którego ramię ma długość 5,7 cm. Oblicz obwód i pole trapezu.</p> <p><u>Zadanie 6</u> Oblicz pole rombu o bokach długości 5 cm, jeżeli koło wpisane w ten romb ma promień długości 1 cm.</p> <p><u>Zadanie 7</u> W kole o środku w punkcie O i promieniu 2cm poprowadzono średnicę AB oraz cięciwę CD, równoległą do niej. Kąt DOC ma rozwartość 60°. Oblicz pole czworokąta $ABCD$.</p> <p><u>Zadanie 8</u> Na okręgu o promieniu $r = 4\text{cm}$ opisano trapez. Oblicz obwód tego trapezu, wiedząc, że ramiona tworzą z dłuższą podstawą kąty 30°.</p>
8	Uwagi metodyczne do realizacji	

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Scenariusz nr 4: Figury jednokładne; twierdzenie o związkach miarowych między odcinkami stycznych i siecznych

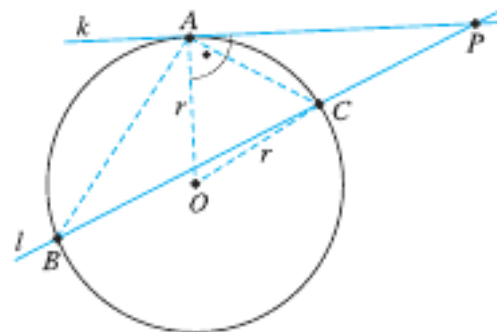
Temat zajęć		Figury jednokładne; twierdzenie o związkach miarowych między odcinkami stycznych i siecznych
Dział		Planimetria
Klasa (poziom edukacyjny)		Klasa druga lub jako materiał powtórzeniowy do matury w klasie trzeciej lub czwartej
Czas trwania zajęć		90 min.
Lp.	Element scenariusza	Treść zajęć
1	Cel ogólny	<ul style="list-style-type: none"> • Kształcenie umiejętności samodzielnego dochodzenia do wiedzy • Rozwijanie umiejętności czytania zadań ze zrozumieniem • Opisywanie obiektów językiem matematycznym • Poznanie definicji jednokładności • Poznanie twierdzenia o związkach między odcinkami stycznych i siecznych
2	Cele szczegółowe	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> • umie przekształcić figury w zadanej jednokładności; • rozpoznaje w jakiej jednokładności zostały przekształcone figury; • potrafi zastosować twierdzenie o związkach miarowych między odcinkami stycznych i siecznych do rozwiązywania zadań.
3	Formy i metody	<ul style="list-style-type: none"> • Pogadanka • Praca z zespołem klasowym • Praca samodzielna

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy

Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	Lekcję prowadzimy wykorzystując mobilną pracownię komputerową aby każdy uczeń miał samodzielny dostęp do komputera. Wykorzystujemy tablicę interaktywną (zastępuje rzutnik, jej narzędzia wykorzystujemy do rozwiązywania zadań, ma możliwość zapisania rozwiązań i wykorzystania ich w dowolnej chwili a także można przekazać je uczniom w postaci pliku) oraz poradnik multimedialny – temat4 z planimetrii.
5	Wprowadzenie do zajęć	<p>Uczniowie poznają pojęcie jednokładności oraz z twierdzenia dotyczące związków miarowych między odcinkami stycznych i siecznych. Korzystamy z poradnika multimedialnego.</p> <p><u>Temat 4*: Figury jednokładne; twierdzenie o związkach miarowych między odcinkami stycznych i siecznych.</u></p> <p>Jednokładnością o środku O i skali s ($s \neq 0$) nazywamy przekształcenie płaszczyzny, które punktowi P przyporządkowuje punkt P' taki, że $\overrightarrow{OP'} = s\overrightarrow{OP}$. Jednokładność oznaczamy J_O^s.</p> <p>Obrazem wielokąta w jednokładności jest wielokąt podobny do niego w skali s. Jeśli chcemy znaleźć obraz wielokąta w jednokładności, znajdujemy obrazy punktów będących jego wierzchołkami.</p> <p>Po przekształceniu figury w jednokładności o skali $s \neq 0$ obwód figury zmienia się s razy, pole figury zmienia się s^2 razy.</p> <p>Związki miarowe między odcinkami stycznych i siecznych.</p> <p>Jeśli mamy dany okrąg ośrodku O i promieniu r oraz punkt P, taki że $PO > r$, prowadzimy przez punkt P dwie proste: prostą k styczną do okręgu w punkcie A i prostą l przecinającą okrąg w dwóch różnych punktach B i C. Otrzymujemy zależność: $AP ^2 = CP \cdot BP$.</p>

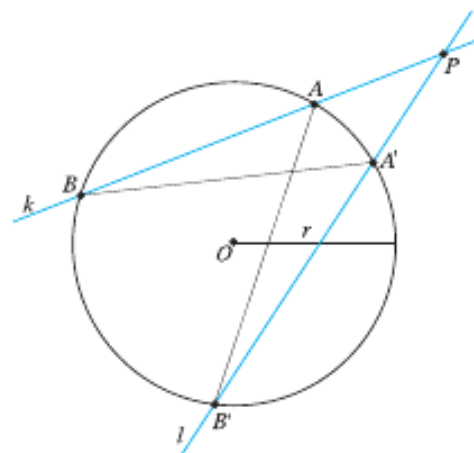
Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”



Twierdzenie o odcinkach dwóch siecznych:

Dla dowolnych dwóch siecznych przechodzących przez punkt P (który nie należy do okręgu) przecinających ten okrąg w punktach odpowiednio A i B oraz A' i B' zachodzi równość:

$$|PA| \cdot |PB| = |PA'| \cdot |PB'|$$



6

Przebieg zajęć (pełna wersja)

Uczniowie analizują przykładowe zadania dotyczące poznanej teorii.



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

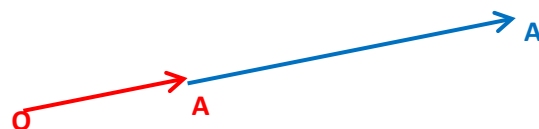
Przykład 1

Znajdź obraz punktu A w jednokładności o środku O i skali 3.

Rozwiązanie:

Wyznaczamy wektor \vec{OA} .

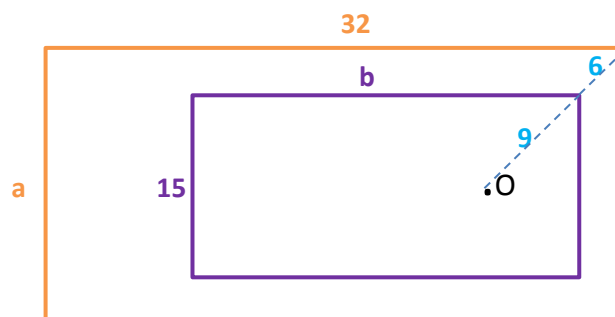
Konstruujemy wektor $\vec{OA'} = 3\vec{OA}$.



Koniec tego wektora będzie obrazem punktu A w jednokładności o środku O i skali 3.

Przykład 2

Prostokąty na rysunku są jednokładne w jednokładności o środku O. Oblicz ich pola.

Rozwiązanie:

Więszy z tych prostokątów jest jednokładny do mniejszego w skali $\frac{15}{9} = \frac{5}{3}$.

Możemy obliczyć więc długość boku b: $\frac{32}{b} = \frac{5}{3}$ stąd otrzymujemy, że $b = 19,2$.

Pole mniejszego z prostokątów wynosi $19,2 \cdot 15 = 288$.

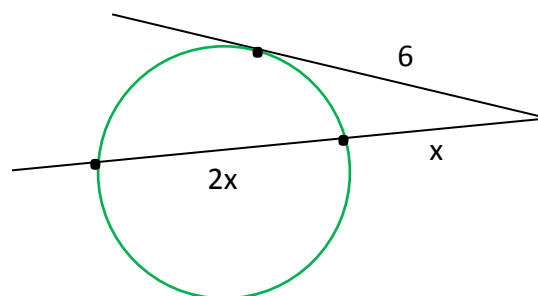
Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Zatem obliczmy pole większego prostokąta:

$$\frac{P}{288} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 \text{ stąd pole większego prostokąta wynosi } 800.$$

Przykład 3

Oblicz długość odcinka x :



Rozwiązanie:

Korzystając z twierdzenia o siecznej i stycznej mamy:

$$6^2 = 3x \cdot x \text{ stąd otrzymujemy } x^2 = 12. \text{ Więc } x = 2\sqrt{3}.$$

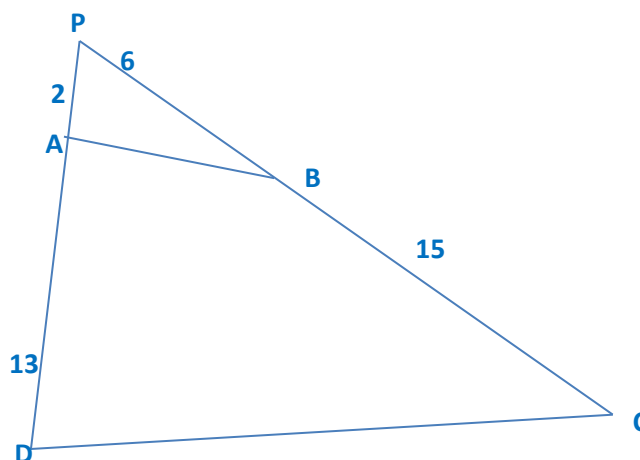
Przykład 4

Dany jest czworokąt wypukły ABCD. Przedłużenia boków AD o długości 13 cm i boku BC o długości 15 cm tego czworokąta przecinają się w punkcie P, tak że $|PD| = 15$, $|PC| = 21$. Ponadto założmy że punkt A należy do odcinka PD, a punkt B należy do odcinka PC. Czy na czworokącie ABCD można opisać okrąg?

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek:

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”



Zakładamy, że na czworokącie ABCD można opisać okrąg. Wtedy z twierdzenia o siecznych mamy: $|PB| \cdot |PC| = |PA| \cdot |PD|$. Podstawiając nasze dane otrzymujemy: $6 \cdot 15 = 2 \cdot 13$ co nie jest prawdą. Oznacza to, że na czworokącie ABCD nie można opisać okręgu.

Przykład 5

Z punktu P leżącego poza okręgiem poprowadzono dwie półproste. Pierwsza z nich przecina okrąg w punktach A i B a druga w punktach C i D. Wiedząc, że $\frac{|PB|}{|PD|} = \frac{2}{3}$ oraz $|PA| - |PC| = 6$. Oblicz długości odcinków PA i PC.

Rozwiązanie:

Oznaczmy $|PA| = x$ i $|PD| = y$. Wówczas $|PC| = x - 6$ i $|PB| = \frac{2}{3}y$.

Z twierdzenia o dwóch siecznych mamy: $|PC| \cdot |PD| = |PA| \cdot |PB|$, czyli $(x - 6)y = x \cdot \frac{2}{3}y$.

Stąd otrzymujemy $x = 18$. Więc $|PA| = 18$, $|PC| = x - 6 = 12$.

Podczas realizacji tematu uczniowie sami lub wraz z nauczycielem dokonują wpisów najistotniejszych



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

		<p>informacji lub tworzą pytania w postaci notatek. Uczniowie rozwiązują zadania z zestawu 5 dołączonego do poradnika. Są to zadania numer 5, 10, 11, 12.</p>
7	Podsumowanie zajęć	<p>Uczniowie przeglądają zapisane notatki. Sprawy problematyczne wyjaśniane są z nauczycielem.</p> <p>Dodatkowo z użyciem tablicy interaktywnej uczniowie rozwiązują zadania:</p> <p><u>Zadanie 1</u> Dany jest kwadrat ABCD oraz środek jednokładności leżący po środku jednego z boków. Wykreśl kwadrat EFGH jednokładny do danego w skali $k = 2$ oraz kwadrat KLMN jednokładny do danego w skali $k = -2$.</p> <p><u>Zadanie 2</u> Dany jest kwadrat ABCD oraz środek jednokładności leżący poza kwadratem. Wykreśl kwadrat EFGH jednokładny do danego w skali $k = 1,5$ oraz kwadrat KLMN jednokładny do danego w skali $k = -1/3$. Co powiesz o polach tych kwadratów?</p> <p><u>Zadanie 3</u> Narysuj trójkąt prostokątny oraz jego obraz jednokładny o skalach $k = 1$ i $k = -1$ względem punktu leżącego poza trójkątem.</p> <p><u>Zadanie 4</u> Narysuj trójkąt równoboczny oraz jego obraz jednokładny o skalach $k = 1$ i $k = -1$ względem punktu leżącego w środku trójkąta.</p> <p><u>Zadanie 5</u> Na jednej prostej zaznaczono trzy punkty: punkt S będący środkiem jednokładności oraz punkty A i A' leżące po przeciwnych stronach punktu S. Jaka jest skala jednokładności jeśli $SA = 5$, $SA' = 15$.</p> <p><u>Zadanie 6</u> Trójkąt DEF jest jednokładny do trójkąta ABC w skali $k = -\frac{2}{7}$. Jakie długości mają boki trójkąta ABC jeśli $DE = 7\text{cm}$, $EF = 9\text{cm}$, $FD = 11\text{cm}$.</p>
8	Uwagi metodyczne do realizacji	

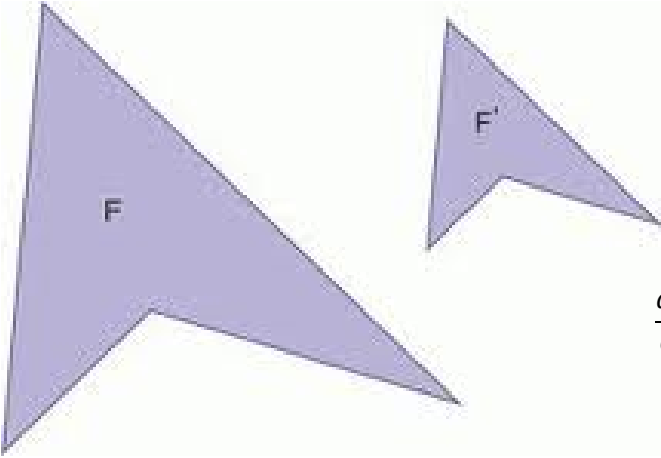
Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Scenariusz nr 5: Figury podobne. Twierdzenie Talesa

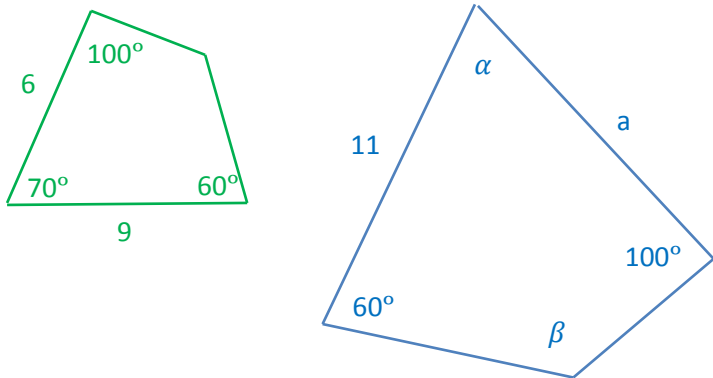
Temat zajęć		Figury podobne. Twierdzenie Talesa
Dział		Planimetria
Klasa (poziom edukacyjny)		Klasa druga lub jako materiał powtórzeniowy do matury w klasie trzeciej lub czwartej
Czas trwania zajęć		90 min.
Lp.	Element scenariusza	Treść zajęć
1	Cel ogólny	<ul style="list-style-type: none"> • Kształcenie umiejętności samodzielnego dochodzenia do wiedzy • Rozwijanie umiejętności czytania zadań ze zrozumieniem • Opisywanie obiektów językiem matematycznym • Poznanie definicji figur podobnych • Poznanie twierdzenia Talesa
2	Cele szczegółowe	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> • rozpoznaje figury podobne; • rozpoznaje trójkąty podobne na podstawie cech podobieństwa trójkątów; • potrafi zastosować twierdzenie Talesa do rozwiązywania zadań.
3	Formy i metody	<ul style="list-style-type: none"> • Pogadanka • Praca z zespołem klasowym • Praca samodzielna
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym	Lekcję prowadzimy wykorzystując mobilną pracownię komputerową aby każdy uczeń miał samodzielny dostęp do komputera.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy

Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

	wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	Wykorzystujemy tablicę interaktywną (zastępuje rzutnik, jej narzędzia wykorzystujemy do rozwiązywania zadań, ma możliwość zapisania rozwiązań i wykorzystania ich w dowolnej chwili a także można przekazać je uczniom w postaci pliku) oraz poradnik multimedialny – temat3 z planimetrii.
5	Wprowadzenie do zajęć	<p>Omówimy z uczniami podobieństwo trójkątów. Uczniowie poznają twierdzenie Talesa.</p> <p>Temat 3: Figury podobne. Twierdzenie Talesa.</p> <p>Mówimy, że dwa wielokąty są podobne, gdy miary ich kątów są odpowiednio równe, a długości ich boków są odpowiednio proporcjonalne (w skali k).</p> <div style="text-align: center;">  $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \frac{d'}{d} = k$ </div> <p>Trójkąty są do siebie podobne gdy stwierdzimy jedną z cech:</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ (b – b – b) jeśli boki jednego trójkąta są proporcjonalne do boków drugiego trójkąta to mówimy, że te trójkąty są podobne; ➤ (b – k – b) jeśli dwa boki jednego trójkąta są proporcjonalne do dwóch boków drugiego trójkąta i kąt między nimi zawarty jest taki sam to mówimy, że te trójkąty są podobne; ➤ (k – k) jeśli miary dwóch kątów jednego trójkąta są równe miarom dwóch kątów drugiego trójkąta to te trójkąty są podobne.

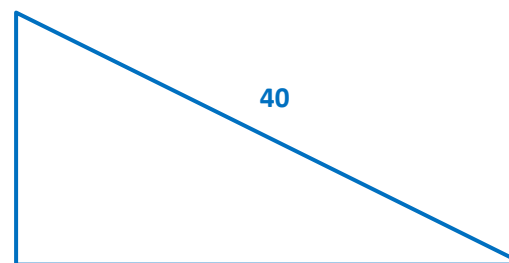
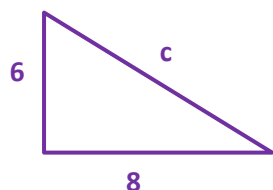
Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

		<p>Stosunek obwodów figur podobnych jest równy skali podobieństwa. Stosunek pól figur podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa.</p> <p>Tw. Talesa Jeśli ramiona kąta przetniemy prostymi równoległymi, to odcinki wyznaczone przez te proste na jednym ramieniu kąta będą proporcjonalne do odpowiednich odcinków wyznaczonych na drugim ramieniu.</p>
6	Przebieg zajęć (pełna wersja)	<p>Uczniowie na przykładzie rozwiązanych zadań poznają zastosowanie poznanej teorii.</p> <p>Przykład 1 Wielokąty na rysunku są podobne. Oblicz długość boku a oraz miary kątów α i β.</p>  <p>Rozwiązanie: W figurach podobnych kąty odpowiadające są takie same więc $\alpha = 70^\circ$ zaś $\beta = 360^\circ - 100^\circ - 70^\circ - 60^\circ = 130^\circ$. Obliczmy teraz długość boku a: $\frac{a}{6} = \frac{11}{9}$ stąd mamy, że $a = \frac{66}{9} = 7\frac{1}{3}$.</p> <p>Przykład 2 Oblicz pole trójkąta prostokątnego o przeciwprostokątnej 40 wiedząc, że jest on podobny do trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych 6 i 8.</p>

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Rozwiązanie:

Mamy więc dwa podobne trójkąty:



Pole pierwszego z nich wynosi $P_1 = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24$.

Znajdziemy teraz długość przeciwprostokątnej c : $6^2 + 8^2 = c^2$ stąd $c = 10$.

Trójkąt drugi jest podobny do pierwszego w skali $k = \frac{40}{c} = \frac{40}{10} = 4$.

Wiemy, że $\frac{P_2}{P_1} = k^2$ więc $\frac{P_2}{24} = 4^2$. Wyliczamy, że $P_2 = 384$.

Przykład 3

Trójkąt równoboczny o boku a przekształcono przez podobieństwo w skali $s > 1$, a następnie przekształcono przez podobieństwo w skali $\frac{1}{2}s$ i otrzymano ten sam trójkąt o boku a . Znajdź skalę s .

Rozwiązanie:

Mamy trójkąt równoboczny o boku a . Trójkąt do niego podobny niech ma bok a' .

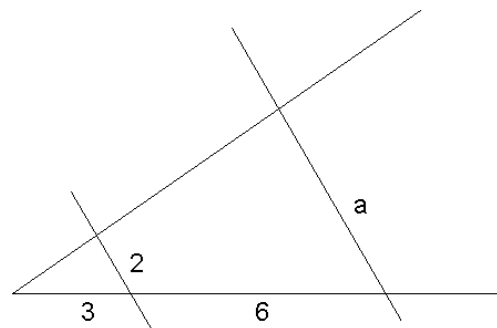
Stąd otrzymujemy $\frac{a'}{a} = s$ oraz $\frac{a}{a'} = \frac{1}{2}s$. Odwracając drugie równanie mamy $\frac{a'}{a} = \frac{2}{s}$.

Przyrównując prawe strony obu równań mamy: $\frac{2}{s} = s$ dalej $s^2 = 2$ więc $s = \sqrt{2}$.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Przykład 4

Znajdź długość boku a:

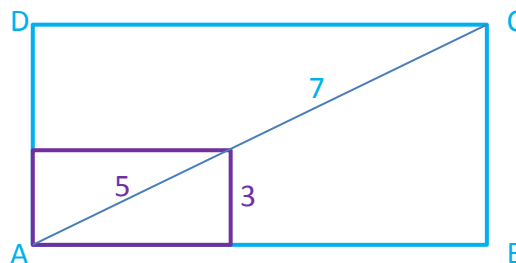
**Rozwiązanie:**

Odczytujemy, że $\frac{3}{2} = \frac{9}{a}$

Obliczamy, że $a = 6$.

Przykład 5

Oblicz obwód prostokąta ABCD:

**Rozwiązanie:**

Prostokąt ABCD jest podobny do mniejszego prostokąta więc wyznaczmy skalę.

$k = \frac{12}{5}$ (stosunek przekątnych).

Dalej mamy $\frac{|BC|}{3} = \frac{12}{5}$ więc $|BC| = \frac{36}{5} = 7\frac{1}{5}$.



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

		<p>Dłuższy bok w mniejszym prostokącie ma długość 4 więc: $\frac{ AB }{4} = \frac{12}{5}$ stąd $AB = \frac{48}{5} = 9\frac{3}{5}$. Obliczamy obwód prostokąta ABCD $= 2 \cdot \frac{36}{5} + 2 \cdot \frac{48}{5} = 33\frac{3}{5}$.</p> <p>Podczas realizacji tematu uczniowie sami lub wraz z nauczycielem dokonują wpisów najistotniejszych informacji lub tworzą pytania w postaci notatek. Do poradnika multimedialnego dołączony jest zestaw 3 zadań z planimetrii. Rozwiązujemy zadania numer 4, 7, 10, 11, 12, 13 i 15.</p>
7	Podsumowanie zajęć	<p>Uczniowie przeglądają zapisane notatki. Sprawy problematyczne wyjaśniane są z nauczycielem.</p> <p>Dodatkowe zadania (uczniowie rozwiązują z zastosowaniem tablicy interaktywnej).</p> <p><u>Zadanie 1</u> Długości boków trójkąta ABC wynoszą 3,5 cm, 5 cm, 7,2 cm. Obwód trójkąta DEF do niego podobnego ma długość 47,1cm. Oblicz długości boków trójkąta ABC.</p> <p><u>Zadanie 2</u> Sprawdź czy trójkąt o bokach $2\sqrt{2}$, 2 i 4 jest podobny do trójkąta o bokach długości $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$ i 2.</p> <p><u>Zadanie 3</u> Czworokąt ABCD ma boki długości 8, 10, 12 i 14. Suma długości najkrótszego i najdłuższego boku czworokąta A'B'C'D' podobnego do czworokąta ABCD jest równa 33. Wyznacz długości boków czworokąta A'B'C'D'.</p> <p><u>Zadanie 4</u> W trapezie równoramiennym ABCD dłuższa podstawa AB równa się 12. Ramię AD ma długość 2. Ramiona przedłużono do ich przecięcia w punkcie E, przy czym $AD : DE = 1:4$. a) Oblicz pole trójkąta ABE. b) Oblicz pole trapezu ABCD.</p> <p><u>Zadanie 5</u> Na boku AB trójkąta ABC obrano punkt D taki, że $AD = 6$ cm, $BD = 0,8$ dm. Przez punkt D</p>

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy

Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

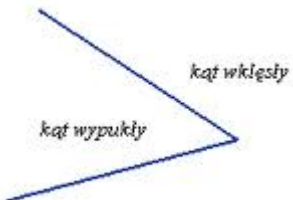
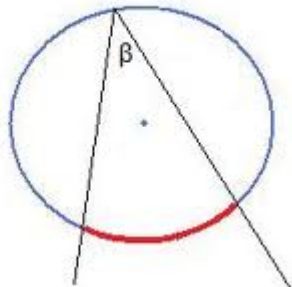
		<p>poprowadzono prostą równoległą do boku BC, która przecina bok AC w punkcie E. Oblicz AE, jeżeli $AC = 280$ mm.</p> <p><u>Zadanie 6</u> W trapezie ABCD, w którym odcinek AB jest równoległy do odcinka CD, przedłużono boki AD i BC do przecięcia w punkcie O. Oblicz długość odcinka OD wiedząc, że jest on krótszy od odcinka OC o 2cm i $AD = 28$cm, a $BC = 32$cm.</p> <p><u>Zadanie 7</u> W trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości $AC = 20$ cm, $AB = 16$ cm poprowadzono prostą równoległą do boku AB, przecinającą bok AC w punkcie K i bok BC w punkcie L. Odcinek KL ma długość 12cm. Oblicz pole powstałego trapezu ABLK.</p>
8	Uwagi metodyczne do realizacji	

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

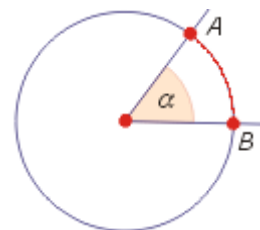
Scenariusz nr 6: Kąty w okręgu

Temat zajęć		Kąty w okręgu
Dział		Planimetria
Klasa (poziom edukacyjny)		Klasa druga lub jako materiał powtórzeniowy do matury w klasie trzeciej lub czwartej
Czas trwania zajęć		90 min.
Lp.	Element scenariusza	Treść zajęć
1	Cel ogólny	<ul style="list-style-type: none"> • Kształcenie umiejętności samodzielnego dochodzenia do wiedzy • Rozwijanie umiejętności czytania zadań ze zrozumieniem • Opisywanie obiektów językiem matematycznym • Kształtowanie umiejętności stosowania poznanych definicji do rozwiązywania zadań
2	Cele szczegółowe	<ul style="list-style-type: none"> • Uczeń: • potrafi wskazać w okręgu kąt środkowy i kąt wpisany; • potrafi zastosować twierdzenia dotyczące kątów w okręgu; • zna pojęcie stycznej do okręgu; • potrafi wykonać odpowiedni rysunek do zadania.
3	Formy i metody	<ul style="list-style-type: none"> • Pogadanka • Praca z zespołem klasowym • Praca samodzielna
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym	Lekcję prowadzimy wykorzystując mobilną pracownię komputerową aby każdy uczeń miał samodzielny dostęp do komputera.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

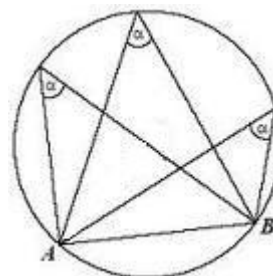
	wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	Wykorzystujemy tablicę interaktywną (zastępuje rzutnik, jej narzędzia wykorzystujemy do rozwiązywania zadań, ma możliwość zapisania rozwiązań i wykorzystania ich w dowolnej chwili a także można przekazać je uczniom w postaci pliku) oraz poradnik multimedialny – temat1 z planimetrii.
5	Wprowadzenie do zajęć	<p>Uczniowie przypominają co to jest kąt wypukły i wklęsły i poznają twierdzenie dotyczące kątów w okręgu.</p> <p><u>Temat 1: Kąty w okręgu.</u></p> <p>Przypomnijmy sobie pojęcie kąta wypukłego i kąta wklęsłego:</p>  <p>Aby móc mówić o kątach w okręgu wyjaśnijmy sobie pojęcia kąta wpisanego i kąta środkowego.</p> <p>Kąt wpisany to kąt wypukły, którego wierzchołkiem jest kąt leżący na okręgu, a jego ramiona przecinają okrąg w dwóch punktach. Dla każdego kąta wpisanego możemy wskazać łuk okręgu, na którym ten kąt jest oparty.</p>  <p>Kąt środkowy, to kąt, którego wierzchołkiem jest środek okręgu. Tu również możemy wskazać łuk na którym kąt jest oparty.</p>

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

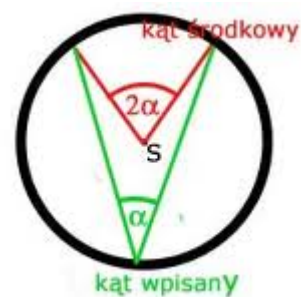


Własności kątów w kole i okręgu:

- Kąty wpisane oparte na tym samym łuku są równe.

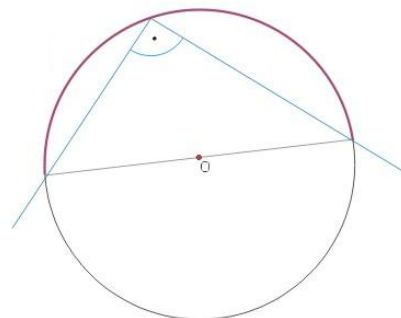


- Kąt wpisany oparty na tym samym łuku co kąt środkowy ma od niego miarę dwa razy mniejszą.



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

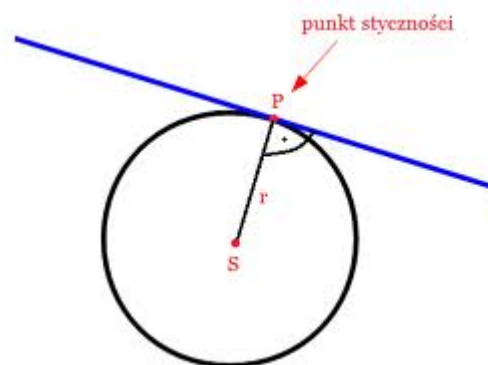
➤ Kąt oparty na średnicy jest kątem prostym.



Wzajemne położenie prostej i okręgu.

Prosta i okrąg mogą być rozłączne. Prosta może przecinać okrąg w dwóch punktach. Prosta może mieć też jeden punkt wspólny z okręgiem – mówimy wtedy, że jest **styczna** do okręgu.

Jeśli w punkcie styczności poprowadzimy promień okręgu to promień do prostej jest nachylony pod kątem prostym.



6

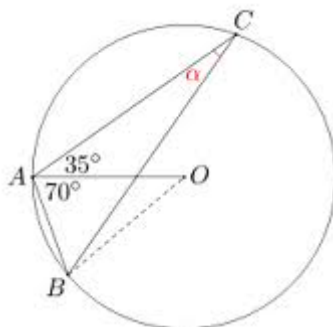
Przebieg zajęć (pełna wersja)

Następnie przechodzimy do analizy przykładowych zadań dotyczących kątów w okręgu.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Przykład 1

Oblicz miarę kąta α :

**Rozwiązanie:**

Szukany kąt jest oparty na tym samym łuku co kąt środkowy AOB. Kąt środkowy AOB leży w trójkącie równoramiennym o kącie przy podstawie 70° więc ma miarę 40° . Szukany kąt α ma miarę dwa razy mniejszą, więc 20° .

Przykład 2

Suma miar kątów środkowego i wpisanego opartego na tym samym łuku wynosi 150° . Jakie miary mają te kąty?

Rozwiązanie:

Oznaczmy kąt wpisany β to wtedy środkowy jest 2β . W sumie dają 150° , więc mamy $\beta + 2\beta = 150^\circ$, dalej $3\beta = 150^\circ$, stąd $\beta = 50^\circ$.

Czyli kąt wpisany ma miarę 50° , a kąt środkowy 100° .

Przykład 3

W okręgu poprowadzono średnicę i dwie cięciwy tak, że tworzą one trójkąt. Kąt pomiędzy średnicą i

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

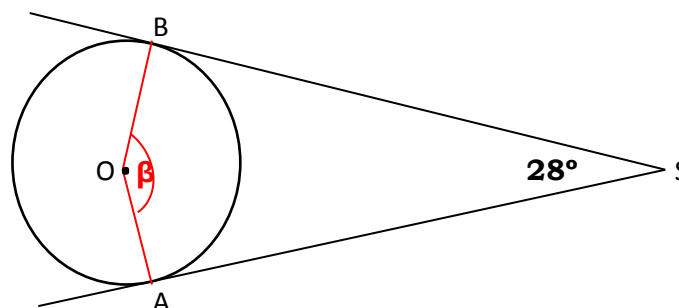
jedną z cięciw jest dwa razy mniejszy od kąta jaki tworzy średnica z drugą z cięciw. Jakie miary kątów ma ten trójkąt?

Rozwiązanie:

Ponieważ trójkąt jest oparty na średnicy to kąt trójkąta oparty na średnicy jest kątem prostym. Dalej mamy dwa kąty, których suma wynosi 90° . Jeden jest dwa razy większy od drugiego więc jeden ma miarę 30° a drugi miarę 60° . Jest to więc trójkąt o kątach 30° , 60° i 90° .

Przykład 4

Znajdź miarę kąta β .



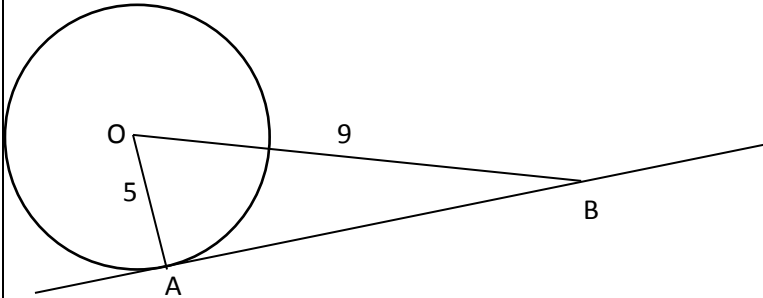
Rozwiązanie:

Ponieważ styczne do promienia są nachylone pod kątem prostym więc czworokąt ASBO ma miary 90° , 28° , 90° , β . W sumie dają one 360° . Więc $\beta = 152^\circ$.

Przykład 5

Punkt A jest punktem styczności prostej do okręgu o promieniu 5 cm. Na prostej obrano punkt B, którego odległość od środka okręgu wynosi 9. Znajdź odległość między punktami A i B.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

		<p><u>Rozwiązanie:</u> Wykonujemy rysunek:</p>  <p>Trójkąt AOB jest prostokątny więc, długość odcinka AB obliczmy z twierdzenia Pitagorasa: $AB ^2 + 5^2 = 9^2$ Obliczając otrzymujemy $AB = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$.</p> <p>Podczas realizacji tematu uczniowie sami lub wraz z nauczycielem dokonują wpisów najistotniejszych informacji lub tworzą pytania w postaci notatek. Uczniowie rozwiążą zadania z zestawu III dołączonego do poradnika. Są to zadania numer 1, 2, 5, 6, 9, 14.</p>
7	Podsumowanie zajęć	<p>Uczniowie przeglądają zapisane notatki. Sprawy problematyczne wyjaśniane są z nauczycielem.</p> <p>Zadania dodatkowe do rozwiązania (wykorzystujemy tablicę interaktywną).</p> <p>Zadanie 1 Oblicz pole zacieniowanej figury wiedząc, że promień mniejszego okręgu jest równy 4, a większego 8.</p>

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

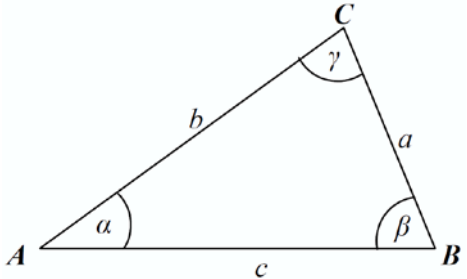
		<div data-bbox="945 261 1554 651" data-label="Image"> </div> <p>Zadanie 2 Dane są dwa okręgi współśrodkowe o różnych promieniach. Cięciwa większego okręgu styczna do mniejszego okręgu ma długość 12. Oblicz pole pierścienia kołowego utworzonego przez te okręgi. (Pierścień kołowy, to część płaszczyzny ograniczona dwoma okręgami).</p> <p>Zadanie 3 W okręgu o środku O i promieniu 5 cm odległość cięciwy AB od środka okręgu jest 2 razy mniejsza niż promień okręgu.</p> <ol style="list-style-type: none"> Oblicz długość cięciwy AB Oblicz pole figury ograniczonej okręgiem i cięciwą (są dwa takie obszary to wybierz mniejszy z nich). Wynik zaokrąglij do dwóch miejsc po przecinku.
8	Uwagi metodyczne do realizacji	

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

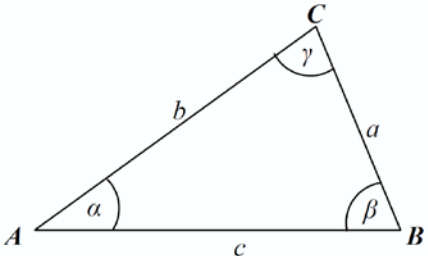
Scenariusz nr 7*: Twierdzenie sinusów i cosinusów

Temat zajęć		Twierdzenie sinusów i cosinusów
Dział		Planimetria
Klasa (poziom edukacyjny)		Klasa druga lub jako materiał powtórzeniowy do matury w klasie trzeciej lub czwartej
Czas trwania zajęć		90 min.
Lp.	Element scenariusza	Treść zajęć
1	Cel ogólny	<ul style="list-style-type: none"> • Kształcenie umiejętności samodzielnego dochodzenia do wiedzy • Rozwijanie umiejętności czytania zadań ze zrozumieniem • Opisywanie obiektów językiem matematycznym • Poznanie twierdzenie sinusów • Poznanie twierdzenia cosinusów
2	Cele szczegółowe	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> • zna i rozumie twierdzenia sinusów i cosinusów; • potrafi zastosować twierdzenie sinusów i twierdzenie cosinusów do obliczaniach długości boków i miar kątów.
3	Formy i metody	<ul style="list-style-type: none"> • Pogadanka • Praca z zespołem klasowym • Praca samodzielna
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym	Lekcję prowadzimy wykorzystując mobilną pracownię komputerową aby każdy uczeń miał samodzielny dostęp do komputera.

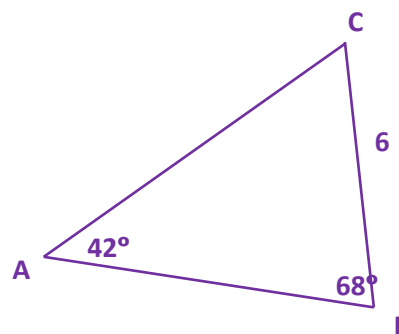
Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

	wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	Wykorzystujemy tablicę interaktywną (zastępuje rzutnik, jej narzędzia wykorzystujemy do rozwiązywania zadań, ma możliwość zapisania rozwiązań i wykorzystania ich w dowolnej chwili a także można przekazać je uczniom w postaci pliku) oraz poradnik multimedialny – temat5 z planimetrii.
5	Wprowadzenie do zajęć	<p>Uczniowie poznają twierdzenie sinusów i cosinusów. Korzystamy z poradnika multimedialnego.</p> <p><u>Temat 5*: Twierdzenie sinusów; twierdzenie cosinusów.</u></p> <p>W trójkącie istnieje ścisły związek między długościami jego boków a jego kątami.</p> <p>Twierdzenie sinusów:</p> <p>W trójkącie stosunki długości boków do sinusów kątów leżących naprzeciw tych boków są równe. Zatem jeśli trójkąt ma długości boków a, b i c, a kąty leżące naprzeciw tych boków mają miary odpowiednio α, β i γ, to zachodzi równość:</p> $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$  <p>Stosunek ten jest też równy podwojonej długości promienia okręgu opisanego na tym trójkącie. Stąd mamy $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$.</p> <p>Twierdzenie cosinusów</p> <p>W trójkącie kwadrat długości dowolnego boku jest równy sumie kwadratów długości pozostałych boków pomniejszonej o podwojony iloczyn długości tych boków i cosinusa kąta pomiędzy nimi.</p>

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

		 $a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos \alpha$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot \cos \alpha$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos \alpha$
6	Przebieg zajęć (pełna wersja)	<p>Uczniowie przyglądają się rozwiązaniem zadaniom, w których zostały zastosowane twierdzenie sinusów i cosinusów.</p> <p>Przykład 1 Czy istnieje trójkąt o kątach 30°, 70°, 80° i bokach długości 5, 9, 13?</p> <p>Rozwiązanie: Jeśli istnieje to naprzeciw najdłuższego boku leży największy kąt itd. Podstawiając do twierdzenia sinusów otrzymujemy:</p> $\frac{5}{\sin 30^\circ} = \frac{9}{\sin 70^\circ} = \frac{13}{\sin 80^\circ}$ $\frac{1}{2} = \frac{0,94}{0,98}$ $10 = 9,57 = 13,27$ <p>co oczywiście nie jest prawdą więc nie ma takiego trójkąta.</p> <p>Przykład 2 W trójkącie ABC bok BC ma długość 6 cm, kąt ABC ma miarę 68° i kąt BAC ma miarę 42°. Oblicz długość boku AB.</p> <p>Rozwiązanie: Wykonujemy rysunek pomocniczy:</p>

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”



Obliczamy miarę kąta naprzeciw boku AB.

Kąt ACB ma miarę $180^\circ - 42^\circ - 68^\circ = 70^\circ$.

Korzystając z twierdzenia sinusów otrzymujemy

$$\frac{6}{\sin 42^\circ} = \frac{|AB|}{\sin 70^\circ}$$

Dalej mamy $\frac{6}{0,67} = \frac{|AB|}{0,94}$ nam daje, że $|AB| \approx 8,42$.

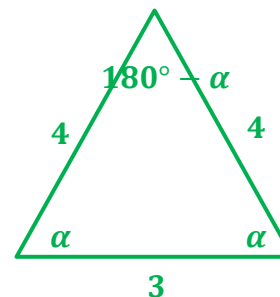
Przykład 3

W trójkącie równoramiennym dane są dwa boki długości 3 i 4. Oblicz trzeci bok trójkąta oraz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Rozwiązanie:

Trzeci bok może mieć długość 3 lub 4.

- I. Rozpatrzmy, że trzeci bok ma długość 4.

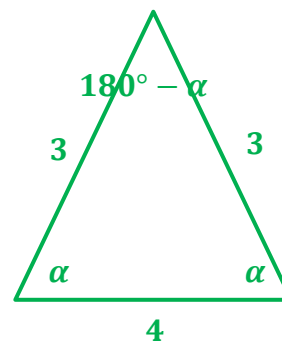


Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Wtedy $\frac{4}{\sin\alpha} = \frac{3}{\sin(180^\circ-2\alpha)}$ korzystając ze wzorów redukcyjnych
otrzymujemy $\frac{4}{\sin\alpha} = \frac{3}{\sin 2\alpha}$ i dalej $\frac{4}{\sin\alpha} = \frac{3}{2\sin\alpha\cos\alpha}$
wyliczamy, że $\cos\alpha = \frac{3}{8}$ z jedynki trygonometrycznej wyliczamy, że $\sin\alpha = \frac{\sqrt{55}}{8}$.

Promień ma długość $2R = \frac{4}{\sin\alpha}$ czyli $R = \frac{16\sqrt{55}}{55}$.

II. Rozpatrzmy, że trzeci bok ma długość 3.



Wtedy $\frac{3}{\sin\alpha} = \frac{4}{\sin(180^\circ-2\alpha)}$ korzystając ze wzorów redukcyjnych
otrzymujemy $\frac{3}{\sin\alpha} = \frac{4}{\sin 2\alpha}$ i dalej $\frac{3}{\sin\alpha} = \frac{4}{2\sin\alpha\cos\alpha}$
wyliczamy, że $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ z jedynki trygonometrycznej wyliczamy, że $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Promień ma długość $2R = \frac{3}{\sin\alpha}$ czyli $R = \frac{9\sqrt{5}}{10}$.

Zatem są dwa rozwiązania.

Przykład 4

W pewnym trójkącie dwa boki mają długość 3cm i 5cm a kąt między nimi miarę 30° . Oblicz długość trzeciego boku.

Rozwiązanie:

Weźmy, że trzeci bok ma długość a . Korzystamy z twierdzenia cosinusów:

$$a^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 30^\circ$$

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

$$a^2 = 34 - 30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

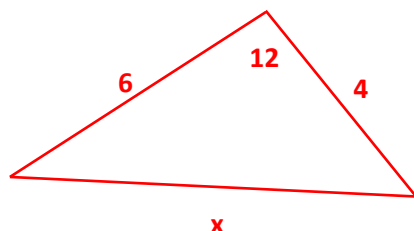
$$a^2 = 34 - 15\sqrt{3}$$

$$a = \sqrt{34 - 15\sqrt{3}}$$

Przykład 5

Dwa boki pewnego trójkąta mają długości 4 cm i 6 cm. Kąt zawarty między nimi ma miarę 120° . Oblicz jaką długość ma promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Rozwiązanie:



Do obliczenia długości promienia wykorzystamy twierdzenie sinusów. Najpierw jednak trzeba obliczyć długość boku x leżącego naprzeciw kąta 120° . Do wyznaczenia tej wielkości zastosujemy twierdzenie cosinusów:

$$x^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ$$

$$x^2 = 36 + 16 - 48 \cdot \cos(180^\circ - 60^\circ)$$

$$x^2 = 52 + 48 \cdot \cos 60^\circ$$

$$x^2 = 52 + 48 \cdot \frac{1}{2}$$

$$x^2 = 76 \text{ więc } x = 2\sqrt{19}$$

Stosując twierdzenie sinusów otrzymujemy $\frac{2\sqrt{19}}{\sin 120^\circ} = 2R$. Licząc dalej mamy:

$$2R = \frac{2\sqrt{19}}{\sin(180^\circ - 60^\circ)} = \frac{2\sqrt{19}}{\sin 60^\circ} = \frac{2\sqrt{19}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{19}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{57}}{3} \text{ co nam daje wynik } R = \frac{2\sqrt{57}}{3}.$$



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

		<p>Podczas realizacji tematu uczniowie sami lub wraz z nauczycielem dokonują wpisów najistotniejszych informacji lub tworzą pytania w postaci notatek.</p> <p>Następnie uczniowie rozwiązują zadania z zestawu 5 (zadania numer 3, 4, 7, 8, 15) dołączonego do poradnika multimedialnego.</p>
7	Podsumowanie zajęć	<p>Uczniowie przeglądają zapisane notatki. Sprawy problematyczne wyjaśniane są z nauczycielem.</p> <p>Dodatkowe zadania do rozwiązania:</p> <p><u>Zadanie 1</u> Znajdź długość trzeciego boku i miary pozostałych dwóch kątów trójkąta o bokach długości $a = 4$, $b = 6$ i kącie między nimi 30°.</p> <p><u>Zadanie 2</u> Znajdź promień okręgu opisanego na trójkącie ABC wiedząc, że $a = 7$, kat leżący naprzeciw boku a to $\alpha = 120^\circ$, $\beta = \gamma$.</p> <p><u>Zadanie 3</u> Dany jest trapez ABCD, w którym dłuższa podstawa AB ma długość $8\sqrt{3}$, a kąt BAD jest równy 60°. Przekątna AC ma długość 6 i zawiera się w dwusiecznej kąta BAD. Oblicz obwód trapezu.</p> <p><u>Zadanie 4</u> Wyznacz kąty trójkąta ABC wiedząc, że $A = (-2, -1)$, $B = (1, -5)$ i $C = (4, 7)$.</p>
8	Uwagi metodyczne do realizacji	