IX Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody trzeciego stopnia
(15 marca 2014 r.)

1. Danych jest takich pięć dodatnich liczb rzeczywistych, że iloczyn dowolnych dwóch spośród nich jest mniejszy od iloczynu pozostałych trzech. Udowodnij, że każda z danych liczb jest większa od 1.

2. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC = 8$ oraz $BC = 10$. Punkt M jest środkiem boku AB. Okrąg o środku w punkcie M ma promień długości 1. Wykaż, że na tym okręgu istnieje dokładnie jeden taki punkt P, dla którego $\sphericalangle APC = 90^\circ$.

3. Dodatnie liczby całkowite a, b mają tę własność, że liczba $4ab$ jest podzielna przez liczbę $a^2 + b^2$. Udowodnij, że $a = b$.

4. Spośród wierzchołków 100-kąta foremnego wybrano 51 punktów. Wykaż, że wśród wybranych punktów istnieją trzy będące wierzchołkami trójkąta prostokątnego równoramiennego.

5. Czy istnieje taki wielościan wypukły, że w każdym jego wierzchołku schodzą się co najmniej cztery krawędzie i który można przeciąć pewną płaszczyzną, otrzymując w przekroju trójkąt? Odpowiedź uzasadnij.

Honorowy patronat Małżonki Prezydenta RP Pani Anny Komorowskiej

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego