IX Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia pierwszego – część testowa

(3 października 2013 r.)

Rozwiązania zadań testowych

1. Liczba $\sqrt[3]{9\cdot\sqrt[3]{27}}$ jest

N a) niewymierna;

T b) równa $\sqrt[3]{27}$;

T c) całkowita.

Komentarz

$\sqrt[3]{9\cdot\sqrt[3]{27}}=\sqrt[3]{9\cdot 3}=\sqrt[3]{27}=3\,.$

2. Zmieszano 1 litr 4% roztworu soli kuchennej w wodzie z 2 litrami 4% roztworu soli kuchennej w wodzie. Otrzymano wówczas roztwór o stężeniu

T a) 4%;

N b) 6%;

N c) 12%.

Komentarz

Roztwory, o których mowa w zadaniu, zawierają te same substancje i mają takie samo stężenie, są więc jednakowe. Po ich zmieszaniu otrzymano zatem tę samą ciecz — 4% roztwór soli kuchennej w wodzie.

3. Przekątne czworokąta wypukłego $ABCD$ są prostopadłe. Wynika z tego, że

N a) czworokąt ten jest kwadratem;

N b) czworokąt ten jest rombem;

T c) $AB^2+CD^2=BC^2+DA^2$.

Komentarz

a), b) Rozpatrzmy dwa dowolne przecinające się pod kątem prostym odcinki AC i BD, których środki się nie pokrywają. Końce tych odcinków tworzą czworokąt wypukły $ABCD$, który nie jest równoległobokiem, a więc tym bardziej rombem, czy też kwadratem.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI · Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej · MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ · ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji · UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

c) Oznaczmy przez P punkt przecięcia przekątnych czworokąta $ABCD$. Na mocy twierdzenia Pitagorasa odpowiednio dla trójkątów APB i CPD, otrzymujemy

$$AB^2 = AP^2 + BP^2 \quad \text{oraz} \quad CD^2 = CP^2 + DP^2\,.$$

Dodając powyższe równości stronami, uzyskujemy $AB^2+CD^2=AP^2+BP^2+CP^2+DP^2$. Analogicznie dowodzimy, że $BC^2+DA^2=AP^2+BP^2+CP^2+DP^2$. Stąd wniosek, że $AB^2+CD^2=BC^2+DA^2$.

4. Każdy bok kwadratu powiększono o 20%. Wynika z tego, że pole tego kwadratu zwiększyło się o

N a) 20%;

N b) 40%;

T c) 44%.

Komentarz

Oznaczmy przez a początkową długość boku kwadratu. Zwiększając liczbę a o 20%, uzyskujemy liczbę $a+\frac{20}{100}a=\frac{12}{10}a$. Pole kwadratu o boku długości $\frac{12}{10}a$ jest równe

$$\left(\frac{12}{10}a\right)^2 = \frac{144}{100}a^2 = a^2 + \frac{44}{100}a^2\,.$$

Stąd wynika, że pole tego kwadratu, początkowo równe a^2, zwiększyło się o 44%.

5. Suma cyfr dodatniej liczby całkowitej a wynosi 30. Wynika z tego, że liczba a jest podzielna przez

N a) 2;

T b) 3;

N c) 5.

Komentarz

a), c) Niech a bedzie liczbą, której wszystkie 30 cyfr to 1. Liczba a nie jest podzielna przez 2, gdyż jej ostatnia cyfra jest nieparzysta. Liczba a nie jest podzielna przez 5, gdyż jej ostatnią cyfrą nie jest 0 ani 5.

b) Liczba 30 jest podzielna przez 3, a zatem na mocy cechy podzielności przez 3, liczba o sumie cyfr równej 30 jest podzielna przez 3.

6. Równanie $x^2-2|x|=0$ ma

T a) co najmniej jedno rozwiązanie;

N b) dokładnie dwa rozwiązania;

T c) więcej niż dwa rozwiązania.

Komentarz

Zauważmy, że $x^2=|x|^2$. Dane równanie możemy zatem zapisać w postaci równoważnej $|x|^2-2|x|=0$, czyli $|x|\cdot(|x|-2)=0$. Z kolei ta zależność jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy $|x|=0$ lub $|x|=2$. Wobec tego równanie $x^2-2|x|=0$ ma dokładnie trzy rozwiązania: $x=0$, $x=2$ oraz $x=-2$.

7. Liczby a i b są całkowite. Wynika z tego, że liczba $2a(a+1)(a+2)+3b(b+1)$ jest podzielna przez

N a) 4;

N b) 5;

T c) 6.

Komentarz

a), b) Przyjmijmy $a=0$, $b=1$. Wówczas liczba $2a(a+1)(a+2)+3b(b+1)=0+6=6$ nie jest podzielna przez 4 oraz nie jest podzielna przez 5.

c) Ponieważ $6=2\cdot 3$ oraz największy wspólny dzielnik liczb 2 i 3 wynosi 1, więc liczba całkowita jest podzielna przez 6 wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez 2 i przez 3.

Liczba $3b(b+1)$ jest podzielna przez 3. Ponadto, jedna spośród dwóch kolejnych liczb całkowitych b, $b+1$ jest parzysta. Wobec tego liczba $3b(b+1)$ jest podzielna przez 2. Stąd wynika, że jest ona podzielna przez 6.

Liczba $2a(a+1)(a+2)$ jest podzielna przez 2. Ponadto, wśród trzech kolejnych liczb całkowitych a, $a+1$, $a+2$ jest jedna podzielna przez 3. Wobec tego liczba $2a(a+1)(a+2)$ jest podzielna przez 3. A zatem jest ona podzielna przez 6.

Skoro obie liczby $2a(a+1)(a+2)$ oraz $3b(b+1)$ są podzielne przez 6, to ich suma również ma tę własność.

8. W czworokącie wypukłym $ABCD$ pola trójkątów ABC i ADC są równe. Wynika z tego, że

N a) pola trójkątów BCD i BAD są równe;

T b) środek przekątnej BD należy do przekątnej AC;

N c) czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.

Komentarz

b) Rozważmy wysokości BM i DN odpowiednio trójkątów ABC i ADC. Ponieważ pola tych trójkątów są równe oraz mają one wspólną podstawę AC, więc $BM=DN$.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Odcinki BM i DN są więc równej długości i równoległe. Wobec tego, jeśli punkty M i N pokrywają się, to każdy z nich jest środkiem odcinka BD, skąd wynika, że środek ten leży na przekątnej AC. W przeciwnym wypadku, czworokąt $MBND$ jest równoległobokiem, a zatem środek przekątnej BD pokrywa się ze środkiem przekątnej MN. Stąd wniosek, że również w tym przypadku środek przekątnej BD należy do przekątnej AC.

a), c) Rozpatrzmy trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AB \neq BC$. Niech D będzie obrazem symetrycznym punktu B względem prostej AC. Wówczas czworokąt $ABCD$ jest wypukły, a pola trójkątów ABC i ADC są równe, gdyż są to trójkąty przystające. Ponieważ wysokości trójkątów BCD i BAD opuszczone na wspólny bok BD są różnej długości, więc pola tych trójkątów są różne. Ponadto $AB \neq CD$, a zatem czworokąt $ABCD$ nie jest równoległobokiem.

9. Nierówność $(x^2+2)x<x$

$\boxed{\text{N}}$ a) nie ma rozwiązań;

$\boxed{\text{T}}$ b) ma nieskończenie wiele rozwiązań;

$\boxed{\text{N}}$ c) jest spełniona przez pewną liczbę dodatnią.

Komentarz

Przekształcając daną nierówność równoważnie, uzyskujemy kolejno

$$(x^2+2)x<x$$

$$x^3+2x<x$$

$$x^3+x<0$$

$$x(x^2+1)<0.$$

Ponieważ $x^2+1>0$, więc zbiorem rozwiązań danej nierówności jest zbiór liczb ujemnych.

10. Liczba $\sqrt{0,4444\ldots}$ jest

$\boxed{\text{T}}$ a) wymierna;

$\boxed{\text{N}}$ b) równa $0,2222\ldots$;

$\boxed{\text{T}}$ c) większa od $0,5$.

Komentarz

Oznaczmy przez x liczbę $0,4444\ldots$. Wówczas

$$10x=10\cdot 0,4444\ldots = 4,4444\ldots = 4+0,4444\ldots = 4+x.$$

Stąd wynika, że $9x=4$, wobec czego $x=\frac{4}{9}$, a zatem

$$\sqrt{0,4444\ldots} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} = 0,6666\ldots\ .$$

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

11. Odległość punktu E od prostej AB jest mniejsza od odległości punktu F od prostej AB. Wynika z tego, że

T a) pole trójkąta ABE jest mniejsze od pola trójkąta ABF;

N b) obwód trójkąta ABE jest mniejszy od obwodu trójkąta ABF;

N c) promień okręgu wpisanego w trójkąt ABE jest mniejszy od promienia okręgu wpisanego w trójkąt ABF.

Komentarz

a) Trójkąty ABE i ABF mają wspólną podstawę AB, a wysokość trójkąta ABE jest mniejsza od wysokości trójkąta ABF. Wobec tego pole trójkąta ABE jest mniejsze od pola trójkąta ABF.

Rozpatrzmy proste k i l równoległe do prostej AB. Przyjmijmy, że odległość prostej k od prostej AB jest mniejsza od odległości prostej l od prostej AB.

b) Wybierzmy dowolny punkt F na prostej l. Na prostej k znajdujemy taki punkt E, że długość odcinka AE jest większa od obwodu trójkąta ABF. Punkty E i F spełniają warunki zadania (odległość punktu E od prostej AB jest mniejsza od odległości punktu F od prostej AB), jednak obwód trójkąta ABE jest *większy* od obwodu trójkąta ABF.

c) Wybierzmy dowolny punkt E na prostej k. Przez punkt B poprowadźmy prostą m, której odległość od punktu A jest dodatnia, ale mniejsza od promienia okręgu wpisanego w trójkąt ABE. Niech F będzie punktem przecięcia prostych l i m. Wówczas punkty E i F spełniają warunki zadania. Ponadto promień okręgu wpisanego w trójkąt ABF jest mniejszy od wysokości tego trójkąta poprowadzonej z wierzchołka A. Z kolei wysokość ta ma długość równą odległości punktu A od prostej m i jest krótsza od promienia okręgu wpisanego w trójkąt ABE.

12. Liczba a^2 jest niewymierna. Wynika z tego, że liczba

T a) a jest niewymierna;

N b) a jest wymierna;

N c) a^4 jest wymierna.

Komentarz

a), b) Przypuśćmy, że liczba a jest wymierna. Wówczas liczba a^2, jako iloczyn dwóch liczb wymiernych, również jest wymierna. Z otrzymanej sprzeczności wynika, że a jest liczbą niewymierną.

c) Przyjmijmy $a = \sqrt[8]{2}$. Wtedy obie liczby $a^2 = \sqrt[4]{2}$ oraz $a^4 = \sqrt{2}$ są niewymierne.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI · Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej · MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ · ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji · UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

13. Sześcian można rozciąć płaskim cięciem na dwa wielościany w taki sposób, aby jeden z tych wielościanów

T a) był graniastosłupem pięciokątnym;

N b) miał osiem ścian;

T c) był ostrosłupem prawidłowym.

Komentarz

Rozważmy sześcian o podstawie $ABCD$.

a) Oznaczmy przez K i L środki odpowiednio krawędzi AB i BC. Przecinając rozpatrywany sześcian płaszczyzną prostopadłą do płaszczyzny podstawy, przechodzącą przez punkty K i L, otrzymujemy graniastosłup pięciokątny o podstawie $AKLCD$.

c) Oznaczmy przez B' taki wierzchołek sześcianu, że odcinek BB' jest jego krawędzią boczną. Przecinając rozpatrywany sześcian płaszczyzną ACB', otrzymujemy ostrosłup prawidłowy trójkątny: jego podstawa ACB' jest trójkątem równobocznym, a krawędzie boczne AB, CB oraz $B'B$ są równej długości.

b) Rozpatrzmy dowolną z dwóch części, na jakie rozcięto dany sześcian. Jest nią wielościan, którego jedna ściana leży w płaszczyźnie przekroju. Każda z pozostałych ścian tego wielościanu należy do innej ściany wyjściowego sześcianu. Stąd wynika, że otrzymany wielościan ma nie więcej niż siedem ścian.

14. Dany jest 101-kąt foremny $A_1A_2\ldots A_{101}$. Wynika z tego, że

T a) trójkąt $A_5A_{10}A_{15}$ jest równoramienny;

T b) trójkąt $A_{15}A_{31}A_{100}$ jest równoramienny;

N c) pewien trójkąt, którego wierzchołkami są trzy spośród punktów $A_1, A_2, \ldots, A_{101}$ jest prostokątny.

Komentarz

Rozważmy okrąg opisany na danym 101-kącie. Przyjmijmy, że kolejność wierzchołków $A_1, A_2, \ldots, A_{101}$ na tym okręgu jest zgodna z ruchem wskazówek zegara. Przez *łuk* XY będziemy rozumieli łuk danego okręgu biegnący od punktu X do punktu Y zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

a), b) Zauważmy, że łuki A_1A_2, A_2A_3, $\ldots$, $A_{101}A_1$ są równej długości. Oznaczmy tę długość przez a. Wówczas łuki A_5A_{10} oraz $A_{10}A_{15}$ mają długość równą $5a$. Wobec tego $\sphericalangle A_5A_{15}A_{10} = \sphericalangle A_{10}A_5A_{15}$, gdyż są to kąty wpisane oparte na łukach tej samej długości. Stąd wniosek, że trójkąt $A_5A_{10}A_{15}$ jest równoramienny. Ponieważ oba łuki $A_{100}A_{15}$ oraz

$A_{15}A_{31}$ mają długość $16a$, więc analogicznie wykazujemy, że trójkąt $A_{15}A_{31}A_{100}$ jest równoramienny.

c) Ponieważ 101 jest liczbą nieparzystą, więc żadne dwa punkty spośród wierzchołków $A_1, A_2, \ldots, A_{101}$ nie są końcami średnicy rozpatrywanego okręgu. Stąd wniosek, że żaden trójkąt, którego wierzchołkami są trzy spośród punktów $A_1, A_2, \ldots, A_{101}$ nie może być prostokątny.

15. Każdy bok i każdą przekątną pięciokąta foremnego pomalowano na czerwono lub niebiesko. Wynika z tego, że

T a) pewne trzy boki są tego samego koloru;

N b) pewne dwie przekątne są różnych kolorów;

N c) z pewnego wierzchołka wychodzą trzy odcinki tego samego koloru.

Komentarz

a) Przypuśćmy, że nie istnieją trzy boki tego samego koloru. Wobec tego, co najwyżej dwa boki są czerwone oraz co najwyżej dwa boki są niebieskie. Stąd wniosek, że pomalowano nie więcej niż cztery boki. Z otrzymanej sprzeczności wynika, że pewne trzy boki są tego samego koloru.

b), c) Przyjmijmy, że wszystkie boki pięciokąta pomalowano na czerwono, a wszystkie przekątne na niebiesko. Wówczas wszystkie przekątne są tego samego koloru i z żadnego wierzchołka nie wychodzą trzy czerwone ani trzy niebieskie odcinki.