IX Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia pierwszego – część korespondencyjna

(1 września 2013 r. – 21 października 2013 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych

1. Do pociągu, który może pomieścić co najwyżej 404 pasażerów, wsiadła na początkowej stacji pewna liczba podróżnych. Na następnej stacji liczba pasażerów tego pociągu zwiększyła się o $1,5\%$. Ilu podróżnych wsiadło do pociągu na początkowej stacji? Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania

Niech x będzie liczbą osób, które wsiadły do pociągu na początkowej stacji. Na następnej stacji liczba pasażerów wzrosła o $1,5\%$, czyli wyniosła

$$y = x + \frac{1,5}{100}x = \frac{1015}{1000}x = \frac{203}{200}x\,.$$

Z warunków zadania wynika, że y jest dodatnią liczbą całkowitą nie większą od 404. Ponadto

$$x = \frac{200}{203}y\,.$$

Ponieważ ułamek $\frac{200}{203}$ jest nieskracalny (największy wspólny dzielnik licznika i mianownika wynosi 1), więc liczba x jest całkowita jedynie wtedy, gdy liczba y jest podzielna przez 203. Jedyną dodatnią liczbą całkowitą, podzielną przez 203 i nie większą od 404 jest 203. Wobec tego $y = 203$. A zatem $x = 200$, co oznacza, że na początkowej stacji do pociągu wsiadło 200 podróżnych.

---

2. Czy istnieją takie liczby całkowite a, b, c, d, że liczby

$$a-b, \quad b-c, \quad c-d, \quad d-a,$$

wypisane w podanym porządku, są kolejnymi liczbami całkowitymi? Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania

Przypuśćmy, że istnieją liczby a, b, c, d o zadanych własnościach. Wówczas dla pewnej liczby całkowitej n spełnione są równości

$$a-b=n, \quad b-c=n+1, \quad c-d=n+2, \quad d-a=n+3$$

lub

$$a-b=n+3, \quad b-c=n+2, \quad c-d=n+1, \quad d-a=n\,.$$

W obu przypadkach, po dodaniu zależności stronami, otrzymujemy

$$(a-b)+(b-c)+(c-d)+(d-a) = 4n+6\,,$$

a zatem $0 = 4n+6$, więc $4n = -6$, skąd wynika, że $n = -\frac{3}{2}$. Otrzymana sprzeczność kończy rozwiązanie zadania.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

3. Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach BC i CD prostokąta $ABCD$, przy czym trójkąt AEF jest równoboczny. Punkt M jest środkiem odcinka AF. Wykaż, że trójkąt BCM jest równoboczny.

Szkic rozwiązania

Ponieważ punkt M jest środkiem boku AF trójkąta równobocznego AEF, więc prosta EM jest wysokością tego trójkąta i $\sphericalangle EMF = 90^\circ$. Ponadto $\sphericalangle ECF = 90^\circ$. Stąd wynika, że okrąg o średnicy EF przechodzi przez punkty C i M. Wobec tego $\sphericalangle MCE = \sphericalangle MFE = 60^\circ$, gdyż są to kąty wpisane oparte na tym samym łuku.

Analogicznie wykazujemy, że punkty A, B, E i M leżą na okręgu o średnicy AE, skąd uzyskujemy równość kątów $\sphericalangle MBE = \sphericalangle MAE = 60^\circ$.

Wykazaliśmy, że w trójkącie BCM każdy z kątów MCB oraz MBC ma miarę 60°, a zatem jest to trójkąt równoboczny.

---

4. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 4 \\ 2xy - 2x = -5\,. \end{cases}$$

Szkic rozwiązania

Dodając równania stronami i przekształcając, uzyskujemy kolejno:

$$\begin{aligned} 2x^2 + y^2 + 2xy - 2x &= -1 \\ x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2x + 1 &= 0 \\ (x+y)^2 + (x-1)^2 &= 0\,. \end{aligned}$$

Wobec tego muszą zachodzić równości $x + y = 0$ oraz $x - 1 = 0$. Są one prawdziwe jedynie wówczas, gdy $x = 1$ i $y = -1$. Podstawiając uzyskane wartości do danego układu równań, uzyskujemy sprzeczność. Stąd wynika, że układ ten nie ma rozwiązań.

Uwaga

Metodzie rozwiązywania układów równań opartej na dodawaniu lub odejmowaniu równań stronami został poświęcony artykuł „Rady na układy”, *Kwadrat* nr 10 (wrzesień 2013).

---

5. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkty K i L są środkami odpowiednio boków AB i CD. Wykaż, że jeżeli pola czworokątów $BCLK$ i $DAKL$ są równe, to czworokąt $ABCD$ jest trapezem.

Szkic rozwiązania

Zauważmy, że trójkąty DKL i KCL mają równe podstawy DL i LC oraz wspólną wysokość poprowadzoną z wierzchołka K. Wobec tego $[DKL] = [KCL]$, gdzie $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$. Stąd wynika, że $[AKD] = [KBC]$.

Niech h_D będzie wysokością trójkąta AKD poprowadzoną z wierzchołka D, a h_C — wysokością trójkąta KBC poprowadzoną z wierzchołka C. Wówczas $\frac{1}{2} \cdot AK \cdot h_D = \frac{1}{2} \cdot KB \cdot h_C$, a zatem $h_D = h_C$, gdyż $AK = KB$. Wobec tego odległości punktów D i C od prostej AB są równe. Ponadto punkty D i C leżą po tej samej stronie prostej AB. Stąd wynika, że proste AB i CD są równoległe, a zatem czworokąt $ABCD$ jest trapezem.

Uwaga

Przykłady rozwiązań podobnych zadań geometrycznych związanych z polem figury można znaleźć w artykule „Pole”, *Kwadrat* nr 10 (wrzesień 2013).

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

6. Punkt P leży na sferze opisanej na sześcianie. Wykaż, że suma kwadratów odległości punktu P od wierzchołków sześcianu nie zależy od wyboru punktu P.

Szkic rozwiązania

Oznaczmy przez A i B takie wierzchołki sześcianu, że odcinek AB stanowi jego przekątną. Poprowadźmy płaszczyznę przez punkty A, B i P. W przekroju sfery otrzymamy okrąg, którego średnicą jest AB. Ponieważ punkt P leży na tym okręgu, więc kąt APB jest kątem wpisanym opartym na półokręgu, a zatem $\sphericalangle APB = 90^\circ$. Stąd, na mocy twierdzenia Pitagorasa, uzyskujemy $AP^2 + BP^2 = AB^2$. Zależność ta jest spełniona również w przypadku, gdy $P = A$ lub $P = B$.

Postępując analogicznie z pozostałymi trzema parami przeciwległych wierzchołków sześcianu i dodając otrzymane równości stronami dowodzimy, że suma kwadratów odległości punktu P od wierzchołków sześcianu jest równa $4d^2$, gdzie d jest długością jego przekątnej. Liczba ta nie zależy od wyboru punktu P.

---

7. Czy kwadrat o wymiarach 2013×2013 można podzielić na prostokąty o wymiarach 1×3 w taki sposób, aby liczba prostokątów ułożonych pionowo różniła się o 1 od liczby prostokątów ułożonych poziomo? Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania

Przypuśćmy, że kwadrat o wymiarach 2013×2013 można podzielić na prostokąty o wymiarach 1×3 w taki sposób, aby liczba prostokątów ułożonych pionowo różniła się o 1 od liczby prostokątów ułożonych poziomo. Wszystkich prostokątów jest

$$\frac{2013 \cdot 2013}{3} = 1350723\,.$$

Bez straty ogólności możemy przyjąć, że liczba prostokątów ułożonych pionowo jest większa. Wynosi ona wówczas 675362.

Pomalujmy kolumny danego kwadratu na przemian kolejno na czerwono, zielono i niebiesko. Ponieważ liczba 2013 jest podzielna przez 3, więc pól (kwadratów jednostkowych) każdego koloru jest tyle samo. Zauważmy, że każdy prostokąt ułożony poziomo pokrywa jedno pole czerwone, jedno zielone i jedno niebieskie. A zatem wszystkie poziome prostokąty pokrywają tyle samo pól każdego z trzech kolorów. Stąd wynika, że pionowe prostokąty również muszą pokryć tyle samo pól każdego koloru.

Każdy prostokąt ułożony pionowo pokrywa trzy pola tego samego koloru. Wobec tego wszystkie pionowe prostokąty dzielą się na trzy grupy: prostokąty czerwone, prostokąty zielone i prostokąty niebieskie. Skoro w sumie pokrywają one tyle samo pól każdego z tych kolorów, to grupy te mają po tyle samo elementów. Liczba 675362 nie dzieli się jednak przez 3. Otrzymana sprzeczność kończy rozwiązanie zadania.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego